

表面波を用いた舗装構造診断への理論的アプローチ

小澤良明¹・松井邦人²・松枝富士雄³

¹ 工修 川田工業株式会社 工事部工事課 (〒550-0014 大阪府大阪市西区北堀江 1-22-19)

² フェロー会員 Ph.D. 東京電機大学 建設環境工学科 (〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町大字石坂)

³ 株式会社日本地下探査 (〒273-0033 千葉県船橋市本郷町 658-2)

舗装の非破壊試験法の1つとしてSASW(Spectral Analysis of Surface Wave)試験が良く知られている。この研究は1980年以降テキサス大学を中心として活発に行われてきた。この試験法は、表面波の伝播速度から分散曲線を求め舗装構造を評価しようとするものである。しかし、わが国では舗装に関してこの種の研究は皆無に近い。表面波試験から舗装構造の評価システム構築を目指し、本研究では、その基礎的研究を行っている。まず、分散曲線を求めるのに必要な4種類の数値解析法を比較している。つぎに、弾性係数を入れ替えた2つの2層モデルを用いて、層構造の違いと位相速度・周波数との関係を調べている。さらに、層厚と弾性係数比が分散曲線にどのように影響するかを明らかにしている。

Key Word : SASW, Rayleigh Wave, Wave Propagation Theory, Dispersion Curve, 2 Layer Model

1. はじめに

表面波で舗装の構造評価を試みた研究としては、1980年代にはアメリカのテキサス大学で Nazarian を中心として始められた表面波スペクトル解析法(Spectral Analysis of Surface Wave = SASW)が代表的である^{1)~4)}。この試験法は、舗装表面に衝撃を与え、ある間隔で舗装表面に設置した2個の受信子で表面波を測定している。層状構造ではこの2点間を伝播する表面波速度(位相速度)が周波数により異なることが知られている。SASW試験では、位相速度と周波数の関係を表す分散曲線から、層状構造の評価を行っている。最近のSASW試験に関する論文では表面波試験用の試験機を開発し、表面波試験の実用化に向けて研究が進行している⁵⁾。

それに対し日本では、昭和30年代後半から40年代前半にかけてボーリング孔を用いた弾性波速度測定などの地質調査が行なわれていたが、地盤構造に対して表面波を適用した研究は比較的少ない^{6)~8)}。本研究で対象としている舗装のように、深度が深くなるほど弾性係数が低下するような構造に対して、表面波伝播を理論的に検討した研究はわが国では見当たらない。しかし、舗装に対しても表面波試験が行われた報告例はあるが、そのデータ整理は地盤に対して開発された方法が適用されているようである。弾性係数が深さ方向に減少する構造と弾性係数が深さ方向に増加する構造では、表面波の伝播特性は全く異なり、特に前者の解を求めることは非常に複雑である。

本研究では、このような層構造の違いと表面波伝播特性との関係を調べるため、最も簡単な2層構造を用いた。位

相速度と周波数の関係を求めるため4種類の方法を用いている。それらは、多層弾性波動論の先駆けの解法であるHASKELL理論⁹⁾をベースとした、多層解法¹⁰⁾・斎藤解法¹¹⁾と、離散化して固有値解析を行うKAUSEL解法¹²⁾・HOSSAIN解法¹³⁾である。これらのプログラムを作成し、各解法の特徴を比較し、層剛性・表層厚が分散曲線に与える影響の考察を行った。尚、多層解法は、変位ポテンシャルを用いる解法であり、特に特性方程式の根の求め方として著者等はCauchy積分定理を用いている。

2. 波動理論

波動問題の解き方には、反射率法とモード解法の2通りの方法が通常用いられる。両者は同じ偏微分方程式を異なった境界条件で解いている¹⁴⁾。反射率法では層構造の反射率を計算する部分が、モード解法では分散曲線法を計算する部分が、全体の計算効率を支配している。しかし、両者に本質的な差がない。ここでは、分散曲線法を用いることにする。

表面に衝撃荷重を作用させるような表面波試験法では、軸対象問題として定式化することが適切であるように考えられる。しかし、これは表面変位を求める場合であり、表面波伝播速度に注目する時には軸対称問題も平面問題も伝播速度は同じである。計算の簡便さと計算効率を考え、平面問題を解くことにした。

等方、均質な完全弾性体の変位の2次元運動方程式は、ラメの定数 λ 、せん断弾性係数 G 、密度 ρ を用いること

で,

$$(\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1a)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + G \nabla^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1b)$$

ここに,

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

ポテンシャル関数 Φ, Ψ を用いて変位 u, v を示し, 式(1a),(1b)をそれぞれ x, y で偏微分して足し合わせると,

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = V_p^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

ここに,

$$V_p = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho} \quad (3)$$

式(3)はP波の伝播速度である. P波は波の進行方向に対し前後に振動している波で, 縦波あるいは疎密波とも呼ばれている.

式(1a)を z で, 式(1b)を x でそれぞれ偏微分し, その差を求めると,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = V_s^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

ここに,

$$V_s = \sqrt{G/\rho} \quad (5)$$

式(5)はS波速度である. 波の進行方向と媒質の振動方向が垂直に運動していることから横波, あるいはせん断波とも呼ばれる.

実体波であるP波・S波以外に, 半無限体表面ではレイリー波(R波)が現れることが知られている. R波は, 表面近傍では, 実体波より大きなエネルギーを有して, 楕円を描く運動をしている. R波は伝播する波の全エネルギーの約70%を占めていることが知られ, 経験的手法では測定波動をR波と仮定し解析を行っている. また, R波とS波の伝播速度はほぼ等しくR波をS波と仮定して構造評価を行う近似法も広く行われる.

多層構造を有する弾性波動理論の解法としては, HASKELL の論文⁹⁾が最も有名である. HASKELL は層毎に膨張項と回転項の組合せを利用して応力・変位の層マトリックスを作成し, 境界条件と層境界での連続条件を用いて弾性波動の解を求める論文を発表した. 伝達マトリックスを使用することで系統だった整理を行い, 平易で理解しやすいため, この分野のパイオニアリング的論文として, その後多くの研究者に引用されている. ここでは, 比較の目的で簡単にその理論を紹介する.

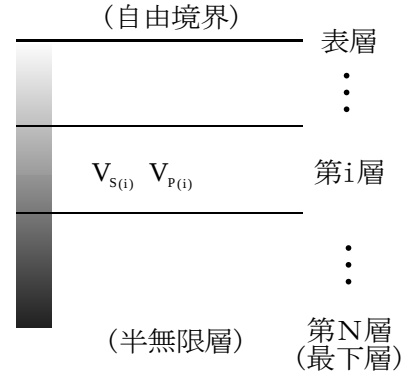


図-1 多層構造物

図-1 に記すような最下層に半無限層を有する N 層構造を伝播する弾性波を考える. 円振動数 ω , 水平方向の位相速度 c の平面波とし, x 軸を層に平行で波の伝播方向を正とし, Z 軸の正の方向をこの物体の表面から内部へ向かうものと定義する. また層番号と層境界番号は, 図に記したように表層から最下層に向けて順番に付ける.

次に, 第 i 層における応力・変位の関係を考える. 横波と縦波の速度, そして表面波速度とを用いて以下の値を次式のように定義する.

$$\gamma_\alpha = \begin{cases} c > V_p & \sqrt{(c/V_p)^2 - 1} \\ c < V_p & -i\sqrt{1 - (c/V_p)^2} \end{cases} \quad (6)$$

$$\gamma_\beta = \begin{cases} c > V_s & \sqrt{(c/V_s)^2 - 1} \\ c < V_s & -i\sqrt{1 - (c/V_s)^2} \end{cases} \quad (7)$$

$$\gamma = 2(V_s/c)^2 \quad (8)$$

i 番目の層の運動方程式は, 膨張波の解 H と回転波の解 Δ とを組み合わせて求める.

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = e^{i(\omega t - kx)} (\Delta' e^{-ik\gamma_\alpha z} + \Delta'' e^{ik\gamma_\alpha z}) \quad (9)$$

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = e^{i(\omega t - kx)} (H' e^{-ik\gamma_\beta z} + H'' e^{ik\gamma_\beta z}) \quad (10)$$

ここに Δ', H' は進行波成分の大きさを支配する積分定数で, Δ'', H'' は遅延波成分を支配する積分定数, k は波数である.

応力・変位を膨張波と回転波の解で表し, マトリックス表記する.

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}/c \\ \dot{w}/c \\ \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \Delta' + \Delta'' \\ \Delta' - \Delta'' \\ H' - H'' \\ H' + H'' \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$[D]$ マトリックスの成分を表-1 に記す. この関係はすべて

表-1 HASKELL 解法における $[D]$ マトリックス

$-(\alpha/c)^2 \cos P$	$i(\alpha/c)^2 \sin P$	$-\gamma\gamma_\beta \cos Q$	$i\gamma\gamma_\beta \cos Q$
$i(\alpha/c)^2 \gamma_\alpha \sin P$	$-(\alpha/c)^2 \gamma_\alpha \cos P$	$-i\gamma \sin Q$	$\gamma \cos Q$
$-\rho\alpha^2(\gamma-1)\cos P$	$i\rho\alpha^2(\gamma-1)\sin P$	$-\rho c^2 \gamma^2 \gamma_\beta \cos Q$	$i\rho c^2 \gamma^2 \gamma_\beta \cos Q$
$-i\rho\alpha^2 \gamma \gamma_\alpha \sin P$	$\rho\alpha^2 \gamma \gamma_\alpha \cos P$	$i\rho c^2 \gamma(\gamma-1)\sin Q$	$-\rho c^2 \gamma(\gamma-1)\cos Q$

ここで, $P = k\gamma_\alpha z$, $Q = k\gamma_\beta z$

表-2 多層解法における $[D]$ マトリックス

$-ie^{-qz}$	$-ie^{qz}$	$-se^{-sz}$	se^{sz}
$-qe^{-qz}$	qe^{qz}	ie^{-sz}	ie^{sz}
$(-\lambda k + kq^2(2\mu + \lambda))e^{-qz}$	$(-\lambda k + kq^2(2\mu + \lambda))e^{qz}$	$-2i\mu kse^{-sz}$	$2i\mu kse^{sz}$
$2i\mu kqe^{-qz}$	$-2i\mu kqe^{qz}$	$\mu k(1+s^2)e^{-sz}$	$\mu k(1+s^2)e^{sz}$

の層で成り立つ. 特定の層を表す場合, 必要におおじて添え字を用いる. i 番目と $i+1$ 番目の層の境界では, 変位と応力の連続条件を用いると次式のような関係が得られる.

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}^{(i)}/c \\ \dot{w}^{(i)}/c \\ \sigma^{(i)} \\ \tau^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u}^{(i+1)}/c \\ \dot{w}^{(i+1)}/c \\ \sigma^{(i+1)} \\ \tau^{(i+1)} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

式(11),(12)より, 表層 (第 1 層) の応力・変位と, 最下層 (第 N 層) の積分定数との関係を示す伝達マトリックスを作成できる. 最下層である第 N 層では, z が無限大になると, 応力, 変位はゼロと考えられ (半無限層), 最下層 (第 N 層) における積分定数は $\Delta''_{(N)} = H''_{(N)} = 0$ となる. 表層における境界条件は自由境界である.

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}^{(1)}/c \\ \dot{w}^{(1)}/c \\ \sigma^{(1)} \\ \tau^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u}^{(1)}/c \\ \dot{w}^{(1)}/c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

表層と最下層の伝達マトリックスの成分を t_{ij} で示し, 境界条件を考慮した表層と最下層の関係を以下の式で示すことができる.

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}^{(1)}/c \\ \dot{w}^{(1)}/c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta'_{(N)} \\ \Delta'_{(N)} \\ H'_{(N)} \\ H'_{(N)} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

上式の $\Delta'_{(N)}, H'_{(N)}$ を消去する

$$\frac{\dot{u}}{\dot{w}} = \frac{t_{22} - t_{12}}{t_{11} - t_{21}} = \frac{t_{42} - t_{32}}{t_{31} - t_{41}} \quad (15)$$

上式を満たす位相速度 c と波数 k を探索する行列式問題に帰着する. 本理論はその後多くの研究者のベースになっているが, 実際に計算するとき数学的に非常に不安定となることが指摘されており¹⁵⁾, 本研究でも理論の紹介にとどめることにする.

2-1. 多層解法

先述した HASKELL 解法と異なり, 多層解法では変位ポテンシャルを用いている. u と w をそれぞれ X 軸方向と Z 軸方向の変位とすると,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (16a)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (16b)$$

式(16a), (16b)を式(1a), (1b)に代入し, それぞれ ϕ と ψ だけの関数となるように整理すると,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = V_p^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (17a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = V_s^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (17b)$$

また, 次式のように定義すると

$$q = \sqrt{1 - c^2/V_p^2}, \quad s = \sqrt{1 - c^2/V_s^2} \quad (18)$$

変位と応力は以下のマトリックスで表すことができる.

表-3 斎藤解法における $[D]$ マトリックス

sC_α	s^2S_α	C_β	qS_β
$\rho s(\gamma-1)S_\alpha$	$\rho(\gamma-1)C_\alpha$	$\rho\gamma q^2S_\beta$	$\rho\gamma qC_\beta$
sS_α	C_α	q^2S_β	qC_β
$\rho\gamma sC_\alpha$	$\rho\gamma s^2S_\alpha$	$\rho(\gamma-1)C_\beta$	$\rho q(\gamma-1)S_\beta$

ここで, $C_\alpha = \cosh(ksz)$, $S_\alpha = \sinh(ksz)/s$, $C_\beta = \cosh(kqz)$, $S_\beta = \sinh(kqz)/q$

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = e^{i(\omega t - kx)} [D] \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\omega cy_2 = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial y_1}{\partial z} - \lambda k y_3 \quad (23a)$$

$$\omega cy_4 = \mu \left(\frac{\partial y_3}{\partial z} + k y_1 \right) \quad (23b)$$

$[D]$ マトリックスの成分を表-2 に記す.

多層弾性構造への拡張は HASKELL 解法と同様に, 最下層の半無限層における積分定数の条件, 表層における自由境界条件より

$$\begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ w^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^{(N)} \\ 0 \\ C^{(N)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

ここで, t_{ij} は伝達マトリックスの成分である. 式(20)が解を持つためには, 次の条件を満足する必要がある.

$$t_{31}t_{43} - t_{33}t_{41} = 0 \quad (21)$$

その根を求めるには複素根探索ルーチンが必要になり, Cauchy の積分定理を応用している. その方法は付録に示した.

2-2. 斎藤解法¹¹⁾

解析手法の流れは, (1)HASKELL・(2)多層解析法と大きな違いは無い. しかし, 変位・応力を次式のように定義することで層間マトリックス内に虚数が入らず, 実数域のみで解析できるように工夫している. ただし, 最下層の半無限層から上層にいくに従い剛性が小さくなる構造体のみには適用できない.

変位を以下のように定義する

$$w = y_1 Y_k e^{-i\omega t} \quad (22a)$$

$$u = y_3 \frac{1}{k} \frac{\partial Y_k}{\partial x} e^{-i\omega t} \quad (22b)$$

ここで, $Y_k = e^{i(k_x x + k_y y)}$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$

次式を定義することで

応力を以下の式で示せる.

$$\sigma_z = \omega cy_2 Y_k e^{-i\omega t} \quad (24a)$$

$$\tau_{zx} = \omega cy_4 \frac{1}{k} \frac{\partial Y_k}{\partial x} e^{-i\omega t} \quad (24b)$$

式(22a,b)および(24a,b)より, 変位・応力マトリックスは

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} A+C \\ A-C \\ B+D \\ B-D \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$[D]$ マトリックスの成分を表-3 に記す.
境界条件より

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ C \\ D \\ D \end{Bmatrix} \quad (26)$$

上式を整理して,

$$\begin{bmatrix} t_{21} + t_{22} & t_{23} + t_{24} \\ t_{41} + t_{42} & t_{43} + t_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2^{(C)} & y_2^{(D)} \\ y_4^{(C)} & y_4^{(D)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = 0 \quad (27)$$

式(27)より, 求める問題は特性方程式

$$F(k, \omega) = y_2^{(C)} y_4^{(D)} - y_4^{(C)} y_2^{(D)} = 0 \quad (28)$$

の根を求めることになる. 高周波では桁落ちが発生して解を精度良く求めることができない. 斎藤解法では, コンパウンドマトリックス法を用いている. 特性方程式を参考にして, 新たな変数 $Y_{ij}(z)$ を定義する.

$$Y_{ij} = y_i^{(C)} y_j^{(D)} - y_i^{(D)} y_j^{(C)} \quad (i, j = 1 \sim 4) \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
[A] &= \frac{\Delta z}{6} \begin{pmatrix} 2(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & \lambda+2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & \mu \\ \lambda+2\mu & 0 & 0 & 2(\lambda+2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \\
[B] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda-\mu & 0 & 0 & -(\lambda+\mu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-\mu & 0 & 0 & \lambda+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+\mu & 0 & 0 & -(\lambda-\mu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda+\mu) & 0 & 0 & -(\lambda-\mu) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[G] &= \frac{1}{\Delta z} \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2\mu & 0 & 0 & -(\lambda+2\mu) \\ -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & \lambda+2\mu \end{pmatrix} \\
[M] &= \frac{\rho \Delta z}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

図-2 KAUSEL 解法における $[A], [B], [G], [M]$ マトリクス

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\frac{\mu_{(i)}}{\Delta z_{(i)}^2} & \frac{2\mu_{(i)}}{\Delta z_{(i)}^2} + k^2(2\mu_{(i)} + \lambda_{(i)}) - \rho_{(i)}\omega_{(i)}^2 & -\frac{\mu_{(i)}}{\Delta z_{(i)}^2} \\ \frac{k(\mu_{(i)} + \lambda_{(i)})}{2\Delta z} & 0 & -\frac{k(\mu_{(i)} + \lambda_{(i)})}{2\Delta z} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_{(i+1)} & W_{(i+1)} \\ U_{(i)} & W_{(i)} \\ U_{(i-1)} & W_{(i-1)} \end{Bmatrix} = 0 \\
&\begin{pmatrix} -\frac{k(\mu_{(i)} + \lambda_{(i)})}{2\Delta z_{(i)}} & 0 & \frac{k(\mu_{(i)} + \lambda_{(i)})}{2\Delta z_{(i)}} \\ -\frac{2\mu_{(i)} + \lambda_{(i)}}{\Delta z_{(i)}^2} & \frac{2(2\mu_{(i)} + \lambda_{(i)})}{\Delta z_{(i)}^2} + k^2\mu_{(i)} - \rho_{(i)}\omega_{(i)}^2 & -\frac{2\mu_{(i)} + \lambda_{(i)}}{\Delta z_{(i)}^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_{(i+1)} & W_{(i+1)} \\ U_{(i)} & W_{(i)} \\ U_{(i-1)} & W_{(i-1)} \end{Bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

図-3 HOSSAIN 解法における中央差分マトリクス

着目層において、層表面と層底面における関係式は

$$y^{(C)}(z_i) = \mathbf{P}y^{(C)} \quad (30)$$

$$y^{(D)}(z_i) = \mathbf{P}y^{(D)} \quad (31)$$

と定義し、式(29)に代入する。

$$Y_{ij}(z) = \sum_{k,l} Q_{ijkl} Y_{kl} \quad (32)$$

上式は各層で成立する。このとき、自由表面での境界条件は、

$$F(k, \omega) = Y_{24} = 0 \quad (33)$$

2-3. KAUSEL 解法¹²⁾

KAUSEL は HASKELL の解を書き直し、いわゆる剛性マトリクスを作成している。この要素に超越関数が含まれるが、さらに一様な層を再分割して考え、再分割された層の間で超越関数を線形化する離散化手法を用いている。特性方程式の根を求める問題を固有値問題に書き換え、固有値解析のソフトを用いて波数(k)を求めている。

変位成分を U 、応力成分を S と定義し、マトリクス表示をする。

$$\{u \quad iw \quad i\sigma_z \quad \tau_{xz}\}^T = \begin{Bmatrix} U \\ S \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - kx)} \quad (34)$$

式(12)の関係を利用することで、第 $i+1$ 層の下層の変位・応力と、第 i 層の下層の変位・応力は、伝達マトリクス $[H]$ を用いて次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} U_{(i+1)} \\ S_{(i+1)} \end{Bmatrix} = [H^{(i)}] \begin{Bmatrix} U_{(i)} \\ S_{(i)} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

各層に働いている応力 S は、層ごとに生じる外力 P である。応力 S を外力 P と置き換えて式展開を行う。

$$\{P\} = [K]\{U\} \quad (36)$$

ここに、 $[K]$ = 剛性マトリクス

$\{P\}$ = 外力ベクトル・ $\{U\}$ = 変位ベクトル

$[K]$ の剛性マトリクスを離散化する。

$$[K] = k^2[A] + k[B] + [G] - \omega^2[M] \quad (37)$$

ここで、 $[A], [B], [G], [M]$ のマトリクス成分を図-2 に記す。外力がゼロの場合、式(37)は

$$[K]\{U\} = \{0\} \quad (38)$$

したがって外力がゼロの場合，式(37)は

$$k^2[A] + k[B] + [C] - \omega^2[M] = \{0\} \quad (39)$$

式(39)を展開する

$$\begin{bmatrix} -[C_x] & -[B_x] \\ 0 & -[C_z] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ k\bar{w} \end{Bmatrix} = k^2 \begin{bmatrix} [A_x] & 0 \\ [B_x]^T & [A_z] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ k\bar{w} \end{Bmatrix} \quad (40)$$

式(40)は， k^2 の線形固有値問題である．固有値解析のサブルーチンで波数を求めることができる．

2-4. HOSSAIN 解法¹³⁾

KAUSEL 解法は，超越関数を離散化することで，元来行列式問題である波動問題を線形固有値問題に転換し根を求めた．HOSSAIN 解法では，一様な層の中で支配方程式を差分化し，線形固有値問題に帰着させている．

水平・鉛直変位を以下のように定義する．

$$u = U(z)e^{i(kx - \omega t)} \quad (41)$$

$$w = iW(z)e^{i(kx - \omega t)} \quad (42)$$

式(41),(42)を，変位の釣合ひ式に代入する．

$$-\mu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k(\mu + \lambda) \frac{\partial W}{\partial z} + k^2(2\mu + \lambda)U = \rho\omega^2 U \quad (43)$$

$$-(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - k(\mu + \lambda) \frac{\partial U}{\partial z} + \mu k^2 V = \rho\omega^2 W \quad (44)$$

式(43),(44)が HOSSAIN 解法の基本方程式である．式(43),(44)に中央差分を適用すると，図-3 に記すマトリックス表示した2つの式を得られる．図には中央差分のマトリックスしか明記していないが，着目層の位置（表層位置や最下層など）ごとに差分手法を変えてマトリックスを作成する必要がある．各層ごとに求めたマトリックスより全体マトリックスを作成し式展開を行うことにより，KAUSEL 解法で求めた式(40)同様に式展開ができる．

3. 理論の比較

4 種類の理論から得られる結果を比較するため，図-4

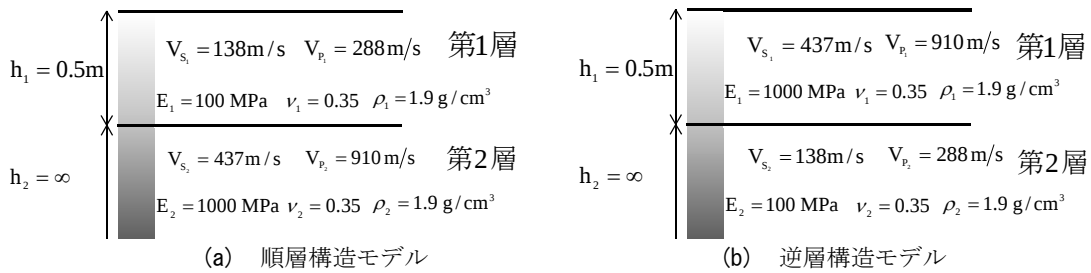


図-4 2層構造モデル

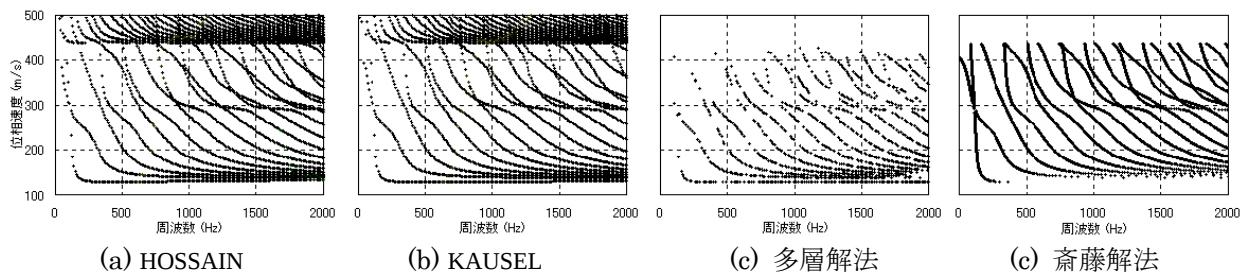


図-5 順層構造解析結果（図-4(a)のモデル）

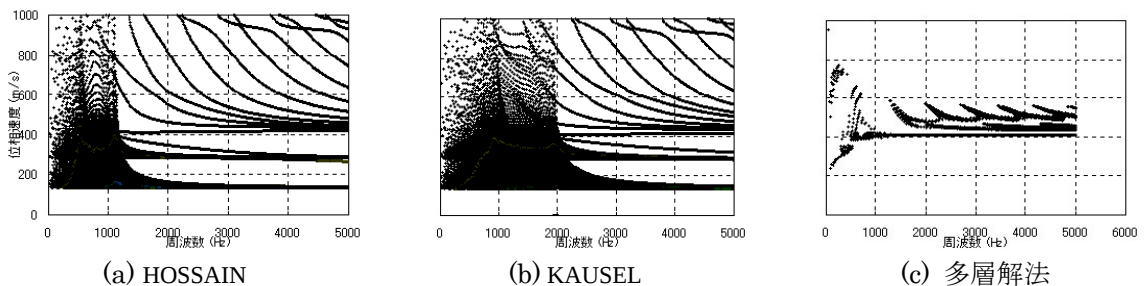


図-6 逆層構造解析結果（図-4(b)のモデル）

に記す2種類の2層断面モデル(順層モデルと逆層モデル)を用いる。順層構造 図-4(a)は第2層の弾性係数が第1層の弾性係数より大きい場合であり、地表面に礫や粘土層が堆積し、地下に岩盤がある一般的な地盤を想定したモデルである。逆層構造 図-4(b)は第1層の弾性係数が第2層の弾性係数より大きく、舗装のように、地表面の剛性が下層の剛性よりも大きいモデルを想定したものである。

3-1. 順層構造

順層構造における波動解析結果に、第1層のS波速度より遅いレイリー波が発生すると言われている。このような構造は複素数域における根探索を行う必要がなく斎藤解法が最も得意とする問題である。

4種類の方法で解析した結果を図-5に記す。本図より、各解法とも位相速度430m/s以下における分散曲線の形状が良く一致している。固有値解析である HOSSAIN・KAUSEL 解法でも十分に細分割すると精度良く解析出来ることが確認できた。全モードすべてを探索出来る斎藤解法と比べ多層解法では、各モードの根を連続的に求めることができないので、斎藤解法より解析精度は劣る。しかし、

モード形状を確認する上で問題は無いと言える。

各解析結果で得られる各モードは、最下層の実体波成分であるS波速から派生し、周波数が高くなると表層のS波速に収束していく傾向が読み取れる。ファーストモードと呼ばれる位相速度が一番遅いモードで、他のモードと異なった挙動を示す。ファーストモードは、第1層のS波速より遅い位相速度に収束しており、レイリー波と呼ばれるものである。レイリー波のエネルギーは大部分その波長までの深さを通過すると言われており、周波数が大きくなるほど、表面から浅い範囲を伝播する。言い換えると、周波数が高くなるほど、下にある剛性の高い層の影響が小さくなるため、レイリー波速度も減少する。本例題の場合、第1層の V_s が138m/sより、このレイリー波速度 V_R は約130m/sであり、第1層の厚さに等しい波長の周波数は $f = V_R / \lambda_R = 130 / 0.5 = 250\text{Hz}$ となる。図-5から250Hzより大きい周波数では、ほぼ第1層のレイリー波速度に収束しており、レイリー波はほぼ波長の深さの範囲で通過するというこれまでの経験則が確認できた。

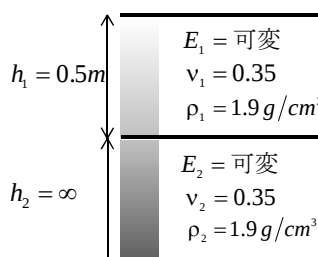


図-7 解析断面

表-4 解析断面

		第1層			第2層		
層特性 弾性係数比		E ₁ (MPa)	V _{s1} (m/s)	V _{p1} (m/s)	E ₂ (MPa)	V _{s2} (m/s)	V _{p2} (m/s)
順層構造	1・5	100	138	288	500	309	644
	1・10	100	138	288	1000	437	910
	1・50	100	138	288	5000	978	2035
	1・100	100	138	288	10000	1382	2878
逆層構造	5・1	500	309	644	100	138	288
	10・1	1000	437	910	100	138	288
	50・1	5000	978	2035	100	138	288
	100・1	10000	1382	2878	100	138	288

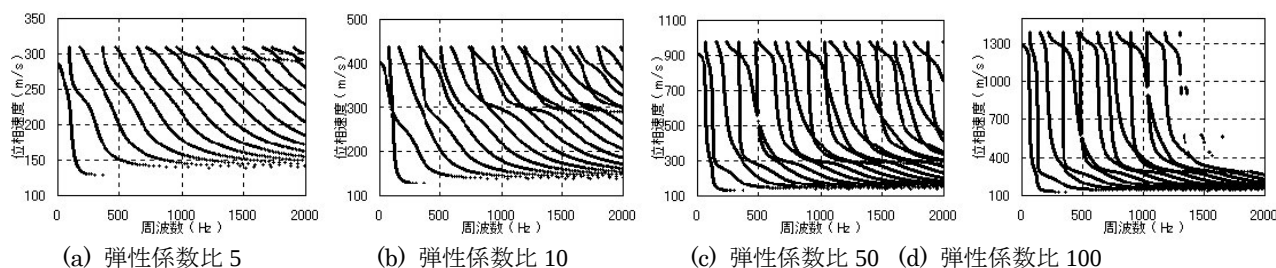


図-8 順層構造における層特性変化

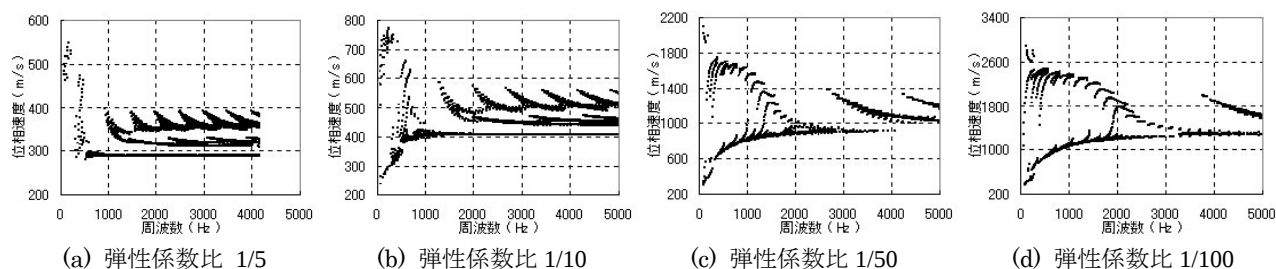


図-9 逆層構造における層特性変化

3-2. 逆層構造

逆層構造は表層にアスファルト層が有るような実舗装に近い構造体である。レイリー波は表層のS波付近に発生すると予測できる。HASKELL 解法では式(12)、多層では式(18)に虚数値が存在し、虚数域における解析が必要になる。この場合、虚根探索ルーチンを持つ多層解法と、虚数域における固有値解析ルーチンを組み込んでいるKAUSEL・HOSSAIN 解法のみが解析可能である。解析結果を図-6 に示した。

KAUSEL・HOSSAIN 解法では、周波数 1000Hz 以上 2000Hz 以下の範囲内においてモードの数が異なっている。この周波数範囲内のモードの特徴は、第2層の実体波の位相速度に収束するモードであり、KAUSEL 解法は第2層の実体波成分の影響を受けやすいと言える。また、多層解法では、周波数 1000Hz 以下のすべてのモードを必ずしも捉えることができていない。

周波数 2000Hz 以上の範囲では、レイリー波の特徴である表層のS波速度より遅い位相速度に収束するモード、すなわちレイリー波の位相速度が確認できる。図-6 から明らかなように多層解析ではさらに低い周波数領域でもレイリー波の確認が行え、HOSSAIN 解法やKAUSEL 解法ではレイリー波を確認することは難しい。これらの中では多層解法が広い周波数範囲でレイリー波の確認ができる。

レイリー波とは逆層構造・順層構造においても、周波数が低い場合は、深い層の剛性情報が表れ、周波数を上げると浅い層の剛性情報が支配する。つまりレイリー波の分散性を決めるパラメータの周波数とは、層厚と密接な関係を有しており、周波数を変動すれば、その周波数に対応する深さまでの剛性情報が得られると言える。

4. 層特性（層弾性係数）とレイリー波

この章では層特性を変化させた際の分散曲線の挙動を調べる。解析には図-7 に記す断面を使用し、基準とする弾性係数を 100Mpa に固定し、基準とする弾性係数を 5,10,50,100 倍した弾性係数を対の弾性係数として4タイプ用意して解析を行った。表-4 には、第1層の弾性係数を固定した順層構造断面タイプと、第2層を固定した逆層構造タイプの計8つの解析断面を記した。順層構造の解析には斎藤解法、逆層構造には多層解法を使用した。

4-1. 順層構造

弾性係数比が異なる4種類の順層構造断面について解析した結果を図-8 に記す。この図より、周波数が低い方から高い方へ変化すると、S波速度は第2層のS波速度から急激に減少し、第1層のS波速度に収束していくことが明らかになった。また、収束する時の周波数は、弾性係数比の値にかかわらず、ほぼ同じである。

1番左端の曲線は、ファーストモードである。図から明らかなように、第2層のS波より少し小さな値から始まり、急速に第1層のS波より少し小さな値に収束している。この位相速度がレイリー波速度 V_R である。S波速度と同様、弾性係数比の値の如何にかかわらず、ほぼ同じ周波数で一定の速度に収束している。

4-2. 逆層構造

弾性係数比が異なる4種類の順層構造断面について解析した結果を図-9 に記す。図-6 から予測できるように、低周波領域では多くのモードが密に存在し、個々のモードを分離することは難しい。しかし、層弾性係数比を大きくすることで低周波域のモードを顕著に現れる。これは、弾性係数比を大きくすることで、第1,2層のS波の速度差が大きくなり、モードの分離が容易になったと思われる。本図より、高周波領域では、第1層のS波より遅いレイリー波速度 V_R に収束するモードが確認できる。また、弾性係数比が高いほど、レイリー波速度 V_R は剛性の低い第2層のS波付近から始まり、第1層のS波より遅い位相速度(レイリー波速度)に収束していく様子が明らかに確認できる。しかし、順層構造の場合と異なり、収束する時の周波数は明らかに弾性係数比により異なっている。

5. 層厚とモードの関係

前節で順層構造の場合、弾性係数比の値の如何にかかわらず、ほぼ同じ周波数の値で位相速度が第1層の位相速度に収束することが確認できている。そこで、第1層の層厚が位相速度に与える影響を調べることにする。図-10 に記すように、層特性を固定し、第1層の厚さを2種類(0.1, 0.5m)に変化させ解析モデルを作成した。

図-11 の(a),(b)は、この2種類の構造で解析した結果である。これらの結果を比較すると層厚の影響は顕著であることが明らかである。

第1層の基準厚を h_1^* とする。着目している構造の第1層厚 h_1 との層厚比を $n = h_1/h_1^*$ と定義する。着目している構造の波長を λ 、基準構造の位相速度 c^* を、周波数を f^* とすると、

$$\lambda = n f^* / c^* \quad (45)$$

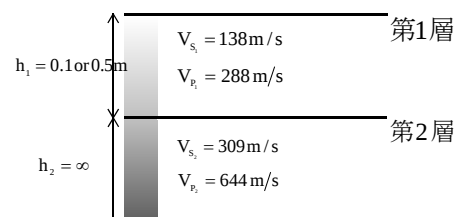


図-10 2層モデル

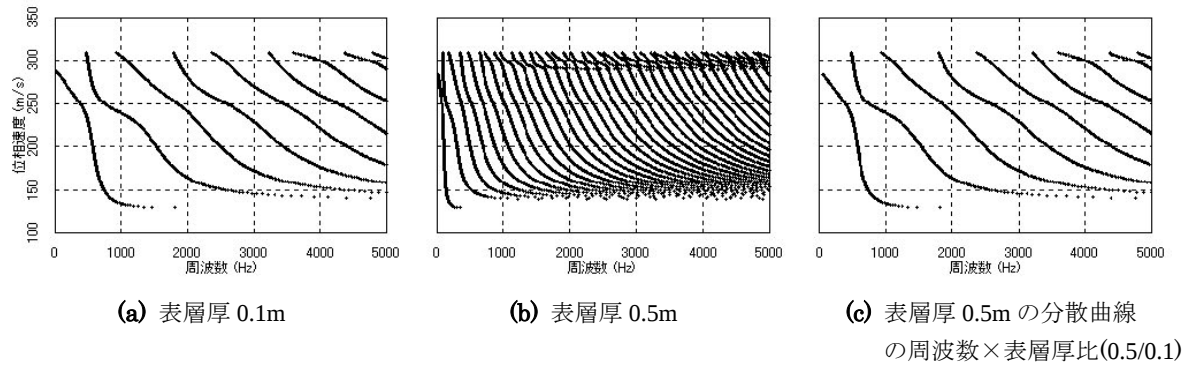


図-11 分散曲線が表層厚に与える影響

の関係が存在する。すなわち、波長は層厚比 n に比例する。図-11 の(a),(b)を比較すると、一見全く関係がないように見える。しかし、第1層の厚さ 0.1m を基準として、式(43)を第1層の厚さが 0.5m に適用して書きかえると図-11(c)となり、図-11(a)と一致する。順層構造では、基準断面として、第1層の厚さと2つの層の弾性係数が与えられ、周波数・位相速度の関係を算定すると、式(45)の関係をを用いて弾性係数は同じで層厚の異なる断面を伝播する波の波長を容易に求めることができる。このことから、 h_1 が薄い場合は、より高い周波数領域まで分散カーブを求めることが必要となることが分かる。しかし、式(45)は逆層構造では必ずしも適用できないことを確認している。

6. 結論

以上の結果を踏まえ、本研究で明らかになった項目を記すと次のようになる。

- (1) KAUSEL, HOSSAIN の近似解析でも、波動解析に関して十分な精度が得られる。
- (2) 伝播する波の周波数が低い時、位相速度は下の層の影響を大きく受けるが、周波数が高くなるにしたがい、急速に表層の位相速度に収束する。
- (3) 順層構造では、1層と2層の弾性係数比を変化させても、ほぼ同じ周波数で表層の位相速度に収束している。位相速度が一定になる周波数は第1層の厚さの影響が支配的である。
- (4) 逆層構造では、位相速度が一定となる周波数は第1層の厚さだけでなく、弾性係数比の影響もあることが確認できた。
- (5) 第1層の厚さが薄いとき、高周波域まで分散曲線を求めることが必要である。

本研究より、地盤と舗装では基本的な表面波の伝播特性が異なり、また舗装のような逆層構造では低周波領域で伝播特性が複雑であることが明らかになった。今後、逆層構造の低周波数領域で位相速度をしっかりと求めることができる数値解析法を開発することが重要である。SASW 試

験を用いて舗装を診断するためには、このようなソフトとインバージョン手法を整備することが不可欠である。

付録 Chauchy の積分定理の応用

複素平面において中心が $a = a_x + ia_y$ 、半径 r の円を考える。 N は分割数を示す大きな整数である

$$n = \frac{r}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f'(z_j)}{f(z_j)} e^{i\theta_j} \quad (A1)$$

ここに、 $\theta_j = 2\pi j/N$ 、 $z = a + re^{i\theta_j}$

n は a を中心とし半径 r の円の内部に存在する根の数を表している。円の内部にある根の総和は

$$s = \frac{r}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z_j f'(z_j)}{f(z_j)} e^{i\theta_j} \quad (A2)$$

から、計算できる。

式(1)・(2)より、複素根の数と平均値が求まる。複素根の数が1のときの平均値が複素根で、複素根の数が1個となる円の中心と半径 r を見つける反復的アルゴリズムが必要になる。

謝辞

Iowa 大学土木環境工学科の Colby Swan 助教授には本研究で用いている洗練された複素根の求め方についての理論を紹介いただいた。ここに記し、謝意を表します。

本研究は、運輸施設事業団「運輸分野における基礎研究推進制度」のプロジェクト(2000-03)、および文部省科学研究費(課題番号 13650512)の支援を受けて行ったことを付記する。

参考文献

- 1) Nazarian, S. and Stokoe, II, K.H.: Use of Surface Waves in Pavement Evaluation, TRR

- 1070, pp.132-144, 1986.
- 2) Nazarian, S., Stokoe II, K. H., Briggs, R. C. and Rogers, R. : Determination of Pavement Layer Thickness and Moduli by SASW Method., TRR 1196, pp. 134-150, 1989
- 3) Yuan, D. and Nazarian, S. : Rapid Determination of Layer Properties of Pavement from Surface Wave Method, TRR 1377, pp.159-166, 1992.
- 4) Nazarian, S. Baker, M. and Crain, K.: Use of Seismic Pavement Analyzer in Pavement Evaluation, TRR 1505, pp. 1-8, 1995.
- 5) Abdallah, I. Yuan, D. and Nazarian, S. Integarting Seismic and Deflection Methods to Estimate Pavement Moduli, 2001 Annual TRB Meeting, 2001.
- 6) 松島 健, 大島弘光 : 長周期微動を用いた地下構造の推定-黒松内低地における探査例-, 物理探査, 第 42 巻, 第 2 号, pp. 97-105, 1989.
- 7) 時松孝次, 宮寺泰生 : 短周期微動に含まれるレイリー波の特性と地盤構造の関係, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 439 号, pp. 81-87, 1992 年 9 月.
- 8) Tokimatsu, K. Tamura, S. and Kojima, H.: Effects of Multiple Modes on Rayleigh Wave Dispersion Characteristics, Vol. 118, No. 10, pp. 1529-1543, Oct. 1992
- 9) Haskell.N.A : The Dispersion of Surface Waves on Multilayered Media, Bulletin of The Seismological Society of America, pp.17-34,1953.
- 10) 左藤泰夫 : 弾性波動論, 岩波出版
- 11) 斎藤正徳・桃沢宏之 : 成層構造に対する反射率, 表面波分散曲線の計算 II.レイリー波の計算, 物理探査, 第 46 巻, pp.283—298, 1993
- 12) Kausel, B.E. and Roesset,J.M. : STIFFNESS MATRICES FOR LAYERED SOILS, Bulletin of Seismological Society of America, vol.71, 1981.
- 13) Hossain,M,M. and Drnevich,V.P. : The Numerical and Optimization Techniques Applied to Surface Waves for Backcalculation of Layer Moduli , Nondestructive Testing of Pavements and Backcalculation of Moduli, American Society for Testing and Materials, pp.649-669,1989
- 14) 斎藤正徳 : 成層構造に対する反射率, 表面波分散曲線の計算, I.液体中の音波, 弾性対中の SH 波, 物理探査, 第 32 巻, 第 5 号, pp.15-26, 1979.
- 15) Dunkin, J.W. : Computation of Modal Solutions in Layered Media at High Frequencies, Bulletin of Seismological Society of America, No.2, pp.335-358, April, 1963

THEORETICAL APPROACH TO STRUCTURAL EVALUATION OF PAVEMENT BY SURFACE WAVE METHOD

Yoshiaki Ozawa, Kunihito Matsui and Fujio Matsueda

Research on SASW (Spectral analysis of surface wave) has been well known as one of nondestructive testing methods for pavements, which has been extensively conducted at University of Texas since 1980. This method makes use of the dispersion characteristics to estimate pavement structure. However, the area of research in our country is almost nothing. Fundamental research on the surface wave test is presented in this paper.

The objective of this research is to compare four numerical methods to compute phase velocity of layer systems, to examine dispersion characteristics of two layer systems exchanging the layer stiffnesses. and to find the effects of the layer thickness and the stiffness ratio of two layers on dispersion curves.