速度と加速度データを用いた舗装構造の逆解析

董　勤喜[1]・坪川将丈[2]・八谷好高[3]・松井邦人[4]

[1]正会員　Ph.D　国土交通省　国土技術政策総合研究所　空港研究部空港施設研究室
（〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1）
[2]正会員　工修　国土交通省　国土技術政策総合研究所　空港研究部空港施設研究室
（〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1）
[3]正会員　工博　国土交通省　国土技術政策総合研究所　空港研究部空港施設研究室
（〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1）
[4]フェロー会員　Ph.D　東京電機大学　理工学部建設環境工学科
（〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町石坂）

FWD 試験では荷重のピーク値とたわみのピーク値を用いて逆解析する静的法と荷重とたわみの時系列データを用いて逆解析する動的法がある．しかし，時系列データを用いて逆解析するなら，速度データあるいは加速度データを測定することも考えられる．たわみデータを測定するためには不動点が必要になるが，速度・加速度データではその必要もない．また，たわみに比べこれらの方が測定量の絶対値が大きいため，測定精度管理が有利であると思われる．本研究では，速度あるいは加速度データが測定されたものとして，それらに対応する逆解析法を示し，その結果について考察する．

Key Word ： *Back-Calculation , Velocity , Acceleration , Dynamic Analysis, Pavement Structure*

1．はじめに

1950 年代の初めにベンケルマンビームが導入されて以来，表面たわみから舗装を構造的に評価することが，さかんに行われるようになってきた．特に FWD が出現して以来, たわみの測定精度の向上と解析手法の開発により，逆解析法が広く構造評価で用いられるようになってきた [1].

FWD 試験は舗装表面に衝撃荷重を作用させ, 載荷点を含み舗装表面数ヶ所で表面たわみを測定している．測定データは本来動的データであるにもかかわらず，荷重およびたわみのピーク値を取りだし，準静的データと見なして逆解析を行っている．すなわち，動的なたわみのピーク値と静的たわみが一致するように，舗装を構成する各層の弾性係数を推定している．明らかに理論的に矛盾したことが現実に行なわれている．

厳密に述べると静的に逆解析を行うとき, FWD のような動的なたわみではなく，静的な絶対たわみが必要となる．また, 動的たわみを測定するにしても，基準となる不動点に対するたわみが必要となるため, このようなたわみを測定することは決して容易ではない．一方，舗装表面の速度や加速度を測定することは不動点を必要とせず，たわみ測定と比べて容易である．HFWD のような小さな荷重でも十分な大きさの応答が測定できる．しかし，速度データや加速度データから逆解析するには，動的な逆解析が必要となる．著者等 [2] の 1 人は FWD 試験のたわみの時系列データを用いた効率的な動的逆解析法を開発した．また，Dong 等 [3] は舗装を 3 次元 FEM モデルで表し，動的逆解析の効率化を図ってきた．パーソナルコンピュータの性能の急速な進歩により，過去には 1 時間ほど要した計算が，いまや数分で動的逆解析ができるようになってきた．

このように動的逆解析を短時間で行うことができるようになってきたことで，近い将来静的逆解析から動的逆解析に移行するときが来ると思われる．また，舗装のたわみがどうしても必要な場合，逆解析時に求めることも可能である．このような現状から，表面たわみではなく表面速度あるいは加速度から逆解析を行う理論を整備することが重要となってきた．速度，加速度を測定することで FWD 試験機も小型化でき操作性が良くなることが期待できる．現在，速度，加速度を測定したデータがないので，本研究では数値シミュレーションを通してその理論の有効性を確認している．

２．動的解析と感度解析

舗装表面に衝撃的な荷重が作用するとき，舗装の挙動は次のような運動方程式で記述できる．

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{z}}+\mathbf{C}\,\dot{\mathbf{z}}+\mathbf{K}\,\mathbf{z}=\mathbf{f}(t) \qquad (1)$$

$$\mathbf{z}(0)=\dot{\mathbf{z}}(0)=\mathbf{0} \qquad (2)$$

ここに，$\mathbf{M},\mathbf{C},\mathbf{K}$ はそれぞれ質量，減衰，剛性マトリックス，$\mathbf{f}(t)$ は荷重ベクトルで時間の関数となる．また，$\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}},\ddot{\mathbf{z}}$ は変位，速度加速度ベクトルで時間の関数となる．$\mathbf{M}$，$\mathbf{C}$，$\mathbf{K}$，$\mathbf{f}$ が与えられると $\mathbf{z}$，$\dot{\mathbf{z}}$，$\ddot{\mathbf{z}}$ について解くことができる．

舗装を構成する各層の弾性係数，減衰定数が未知パラメータであり，この集合を $\mathbf{X}$ で表すとすると，$\mathbf{C},\mathbf{K}$ は $\mathbf{X}$ の関数となる．測定データから未知パラメータを推定するような逆解析を行うとき，たわみ，速度あるいは加速度の未知パラメータに関する感度が必要となる．

感度の計算は運動方程式を未知パラメータで偏微分することで計算できる．すなわち，式(1), (2)を偏微分すると，

$$\mathbf{M}\frac{\partial\ddot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}+\mathbf{C}\frac{\partial\dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}+\mathbf{K}\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial X_j}=-\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial X_j}\dot{\mathbf{z}}-\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial X_j}\mathbf{z} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial X_j}=\frac{\partial\dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}=0 \qquad (4)$$

式(3)は感度方程式，式(4)はその初期値である．運動方程式と比較すると，上式の左辺の微分演算子は運動方程式と同じであり, 右辺が異なるだけである．したがって，運動方程式と同じようにして解き，変位, 速度, 加速度の未知パラメータ X_j に関する感度, $\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial X_j},\frac{\partial\dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j},\frac{\partial\ddot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}$ を求めることができる．

３．逆解析

時間の関数で表される i 点の測定たわみを $u_i(t),(i=1,2,...,n)$，それに対応する解析たわみを $z_i(\mathbf{X},t),(i=1,2,...,n)$ とする．$\mathbf{X}=(X_1,X_2,....,X_m)^T$ は未知パラメータからなるベクトルであり，解析値と測定値が一致するように決定する．すなわち，速度を測定するとき目的関数を次式のように定義する，

$$J=\frac{1}{2}\int_0 \sum_{i=1}^{n}\left\{\dot{u}_i(t)-\dot{z}_i(\mathbf{X},t)\right\}^2 dt \qquad (5)$$

上式の値が最小となるように $\mathbf{X}$ を決定すれば良い．この式は $\mathbf{X}$ に関する非線型関数となるので，最小値を求めるためには繰り返し計算が必要となる．そのため，$\overline{\mathbf{X}}$ の値を仮定して $\mathbf{X}=\overline{\mathbf{X}}+d\mathbf{X}$ とおき，漸化式を誘導する．Taylor 展開を用いると，

$$\dot{z}_i(\overline{\mathbf{X}}+d\mathbf{X},t)=\dot{z}_i(\overline{\mathbf{X}},t)+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial\dot{z}_i}{\partial X_j}dX_j\right)^2 \qquad (6)$$

式(6)を式(5)に代入し，$d\mathbf{X}=(dX_1,dX_2...,dX_m)^T$ に関して最小化すれば良い．すなわち，

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\left\{\dot{u}_i(t)-\dot{z}_i(\overline{\mathbf{X}},t)-\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial\dot{z}_i}{\partial X_j}dX_j\right)\right\}^2 dt \qquad (7)$$

となるので，dX_k で偏微分すると，

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\dot{z}_i}{\partial X_k}\frac{\partial\dot{z}_i}{\partial X_j}\right)dt\right\}dX_j$$
$$=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\dot{z}_i}{\partial X_k}\left\{\dot{u}_i(t)-\dot{z}_i(\overline{\mathbf{X}},t)\right\}dt \quad (k=1,2,...,m) \qquad (8)$$

上式は $d\mathbf{X}$ に関する m 元の連立方程式となり, 求められた $d\mathbf{X}$ が補正量である．今，測定値が速度であるなら u_i,z_i の代わりに $\dot{u}_i,\dot{z}_i$ とおけば良い．式(4)をマトリックス表示すると，

$$\mathbf{A}\,d\mathbf{X}=\mathbf{b} \qquad (9)$$

ここに，

$$\mathbf{A}_{jk}=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\dot{z}_i}{\partial X_j}\frac{\partial\dot{z}_i}{\partial X_k}\right)dt$$
$$\mathbf{b}_j=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\dot{z}_i}{\partial X_j}\left\{\dot{u}_i(t)-\dot{z}_i(\overline{\mathbf{X}},t)\right\}dt \qquad (10)$$

$\mathbf{A}$ は $m\times m$ の対称マトリックス，$\mathbf{f}$ は $m\times 1$ のベクトルである．式(9)はしばしば不安定であるため，解法に注意する必要がある．ここでは式(9)を，特異値分解を用いて解くのが最善であるように思われる．$\mathbf{A}$ を特異値分解すると，一般に次のように書くことができる．

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\,\mathbf{D}\,\mathbf{V}^T \qquad (11)$$

ここでは，$\mathbf{A}$ が正方対称マトリックスであるので，$\mathbf{U}=\mathbf{V}$ となり，$m\times m$ の正方マトリックス，$\mathbf{D}$ は対角マトリックスとなりその要素は特異値と呼ばれる．また，$\mathbf{U},\mathbf{V}$ には，

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U}=\mathbf{I}, \quad \mathbf{V}\mathbf{V}^T=\mathbf{I} \tag{12}$$

の性質がある．式(11)を式(9)に代入し，式(12)を考慮すると，

$$d\mathbf{X}=\mathbf{V}\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{b} \tag{13}$$

逆解析の計算は基本的に次の４ステップから成っている．

ステップ１：工学的判断で最も良いと思われる初期値 $\mathbf{X}$ の値を選定する．

ステップ２：$\mathbf{z}(\mathbf{X})$ を計算する．

ステップ３：$\mathbf{dX}$ を計算する．

ステップ４：$\mathbf{dX}$ の大きさ $|\mathbf{dX}|$ が十分に小さければ，計算を打ち切る．そうでなければ，$\mathbf{X}+\mathbf{dX}\to\mathbf{X}$ としてステップ２に戻る．

計算ステップは上記のように簡単であるが，式(10)の左辺の係数マトリックスはしばしば条件数が非常に大きくなる．このため，測定値に含まれる誤差により，$\mathbf{dX}$ の値がしばしば大きく変動し，計算を安定化することが必要となる．この方策を適切化と呼んでいる．式(13)はまた次のように書くことができる．

$$\mathbf{dX}=\sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{v}_i \tag{14}$$

ここに，$\mathbf{v}_i$ は $\mathbf{V}$ の i 番目の列ベクトルである．また，a_i は次式で表される．

$$a_i=\frac{1}{D_{ii}}\sum_{j=1}^{n} U_{ij}(u_j-z_j) \tag{15}$$

ここに，u_j, z_j はそれぞれ $\mathbf{u},\mathbf{z}$ の j 番目の要素，D_{ii} は i 番目の対角要素，U_{ij} は $\mathbf{U}$ の ij 要素である．式(15)を用いて逆解析するとしばしば振動を繰り返し，収束性が悪い．適切化の方法として，打切り特異値分解とチカノフの方法がしばしば用いられる．打切り特異値分解とは．式(15)の各項のうち，D_{ii} の値が予め設定した閾値より小さいとき a_i の値を 0 と置き，補正量を計算する．これは，測定値 u_j に含まれる誤差が拡大するのを抑える働きがある．しかし，補正ベクトル $\mathbf{dX}$ は m 次元であるにもかかわらず，それより少ない次元に投影したベクトルを使用することになる．収束は早く，計算効率は良いが，切り捨てる特異値の数が多くなりすぎると，誤った値に収束する．

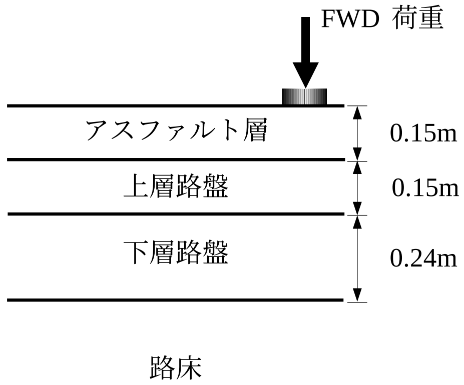


図-1　解析に使用した舗装構造

一方チカノフの方法を用いると，式(15)を次のように書くことができる．

$$\mathbf{dX}=\sum_{i=1}^{m} f_i a_i \mathbf{v}_i \tag{16}$$

ここに，

$$f_i=\frac{D_{ii}^{\,2}}{D_{ii}^{\,2}+\lambda^2} \tag{17}$$

打切り特異値分解では閾値の設定の仕方が問題であるが，本方法ではλ値をどのように設定するかが問題となる．

$\mathbf{A},\mathbf{b}$ を算出するには，感度 $\partial\dot{\mathbf{z}}/\partial X_j,(j=1,2,...,m)$ を計算しておく必要がある．この計算を感度解析と言う．測定値が加速度データの場合，感度は $\partial\ddot{\mathbf{z}}/\partial X_j$ となる．感度は式(3),(4)を解いて求めることができる．

４．動的解析例

動的解析に使用した舗装断面は**図-1** に示すように 4 層から成っている．このモデルは，この断面および各層の弾性係数は，アスファルト舗装要綱 [4)] を参考として決定した D 交通相当断面である．各層の物性値は表-1 に示す通りである．

動的解析は FEM を用いて行っている．舗装モデルの要素分割は**図-2** の通りである．このような舗装モデルで荷重を $P(t)=49\sin^2(25\pi t)$ kN として動的解

表-1　舗装各層の物性値

舗装構成層	弾性係数	質量密度	ポアソン比
アスファルト層	5880	2300	0.35
上層路盤	588	1900	0.35
下層路盤	196	1800	0.35
路床	98	1800	0.35

弾性係数(MPa),　　質量密度(kg/m³)

析を行った．この場合，載荷時間は t=0.0~0.04s[5]，動的解析の時間ステップ幅は 0.002s，解析時間は 0.06s としている．舗装表面におけるたわみ，速度，加速度を算出し，その結果を**図-3** に記した．解析で用いた減衰は，これまでの経験から要素剛性マトリックスに 0.005 を掛けて要素減衰マトリックスとしている．

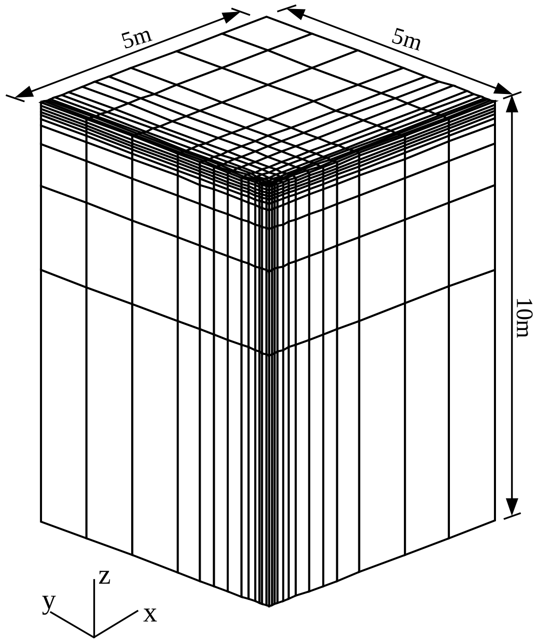
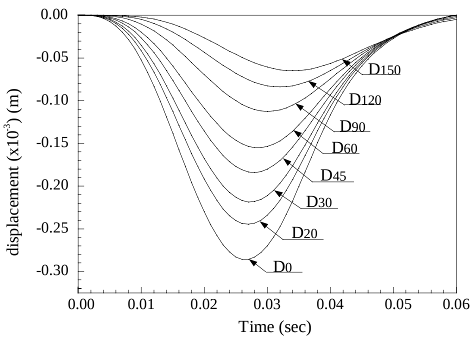


図-2　舗装構造の FEM モデル

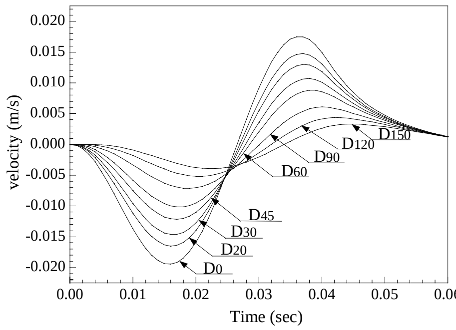
５．舗装の逆解析

(1) 逆解析結果

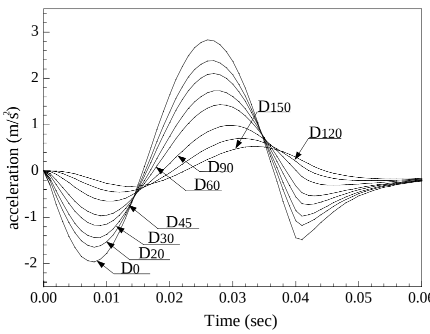
図-3 に示した解析たわみ，解析速度，解析加速度の波形をそれぞれ測定データとみなして逆解析を行った．このデータを用いて弾性係数の初期値を $E_1 = 4800\text{MPa}$ ，$E_2 = 700\text{MPa}$ ，$E_3 = 160\,\text{MPa}$ ，$E_4 = 120\text{MPa}$, またそれぞれの層の減衰係数はこれまでの経験から 0.005×弾性係数として設定し逆解析を行っている．逆解析では減衰係数，弾性係数の



(a) たわみ

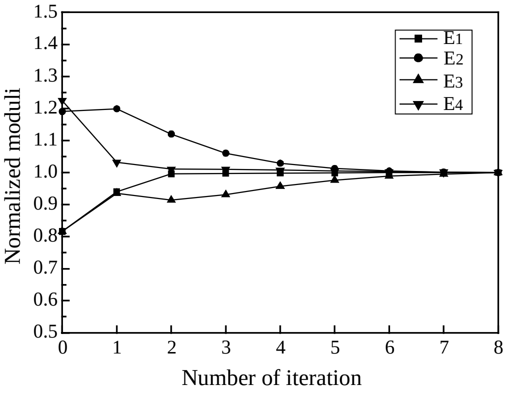


(b) 速度

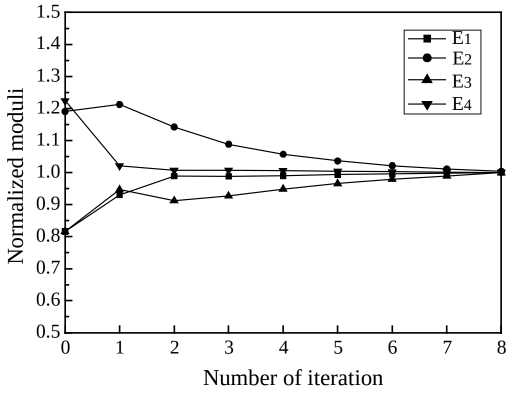


(c) 加速度

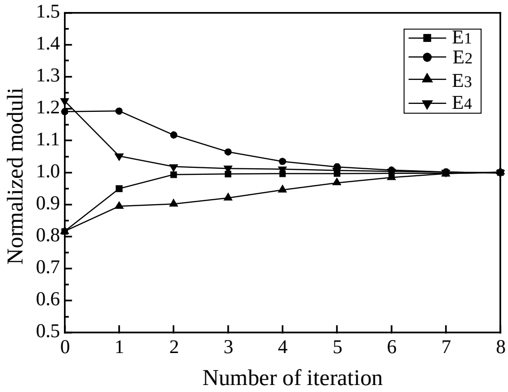
図-3　舗装のたわみ，速度，加速度



(a) たわみ



(b) 速度



(c) 加速度

図-4 たわみ，速度，加速度データのそれぞれを用いた収束状況

計 8 個を変数として扱っている．本論文では，弾性係数の収束過程だけを**図-4(a)～(c)**に図示した．図の縦軸は各層の弾性係数の真値を繰り返し計算時に得られた層弾性係数で割り無次元化している．たわみ，速度，加速度のいずれのデータを用いても比が1.0 に収束していることから，速度，加速度にかかわらず使用しているアルゴリズムは正しく機能していることは明らかである．尚，逆解析に使用した PC は，Gateway GP7, 周波数 800MHz，768 Mb メモリである．例題の自由度は 17043 であり，逆解析に要する時間は１時間４０分であった．

(2) 層厚誤差の影響

これまで静的逆解析に関する研究から，層厚に誤

表-2 層厚誤差が逆解析結果に及ぼす影響(層厚を 1cm 減じた場合) (単位: MPa)

	アスファルト層				上層路盤				下層路盤			
	E1	E2	E3	E4	E1	E2	E3	E4	E1	E2	E3	E4
たわみ	6044	840	171	99	5884	601	208	98	5887	586	200	98
速度	6130	799	179	98	5890	599	208	98	5883	585	201	98
加速度	6162	786	182	98	5866	603	208	98	5884	587	201	98
真値	5880	588	196	98	5880	588	196	98	5880	588	196	98

表-3 センサーの数が逆解析結果に及ぼす影響 (単位: MPa)

	D0 と D30				7 つのセンサー			
	E1	E2	E3	E4	E1	E2	E3	E4
たわみ	5639	750	155	100	5880	588	196	98
速度	5632	751	156	100	5880	588	196	98
加速度	5564	768	166	98	5880	588	196	98

差があると逆解析した結果に影響することが知られている．動的逆解析の場合どの程度影響するのか明らかでない．ここでは，1 層だけ 1cm 厚さを減らして逆解析を行った．その結果を**表-2** に整理した．層厚の誤差が逆解析結果に及ぼす影響は，たわみ，速度，加速度波形にかかわらず同じ程度であると言うことができる．アスファルト層の厚さの誤差は 2 層目の弾性係数に大きく影響している．上層路盤厚および下層路盤厚の誤差は各層の弾性係数の推定値にあまり大きな影響を与えないようである．

(3) センサーの数の影響

測定システムとしてセンサーの数が少ないほど一般に経済的である．また，逆解析を行うときもセンサーの数が少ないほど計算効率もよくなる傾向がる．しかし，センサーの数が少ないと誤差の影響も受けやすいと思われる．そこで，数値シミュレーションで誤差の影響を調べることにした．ここでは，各層の厚さは正しい値を用いることにする．D0 と D30 の 2 つのセンサーを用いて逆解析した結果と，7 個のセンサーを用いた結果との比較を**表-3** に示す．センサーが 7 個の場合は真値に収束しているが，センサーが 2 個では逆解析結果は正しい値に収束していない．少なくとも 2 個のセンサーでは十分でないと断言できる．

5．結論

本論文の解析結果から次のような結論が得られる．

① 速度･加速度の時系列データから逆解析することが確認できた．

② 層厚の誤差が逆解析結果に与える影響は速度･加速度データを用いても，たわみデータと同じ程度である．

③ 逆解析に使用するセンサーの数を少なくする

テキサス大学を中心として精力的に行われている表面波試験では，層厚と層弾性係数を推定できると主張している．FWD 試験でたわみデータを測定している限り，層厚を推定することは不可能である．速度・加速度センサーでは高い周波数まで計測できるため表面波試験では分散曲線から層厚推定が可能となっている．本研究は，FWD 試験と表面波試験の長所を取り入れた折衷型の試験機開発を目指した予備研究である．今後，十分に高い周波数成分を含む衝撃荷重を発生させることができれば，実用化が期待できる．

謝辞：この研究は運輸施設整備事業団「運輸分野における基礎的研究推進制度」によって行われたものである．ご協力いただいた関係各所に深く謝意を表します．

参考文献

1) Ullidtz，P. and Coetzee，N.F.: Analytical Procedures in Nondestructive Testing Pavement Evaluation，Transportation Research Record 1482，pp.61-66.

2) 菊田征勇，松井邦人，塩谷俊之，安部芳久：マトリックス縮小化を用いた時間領域における舗装構造の逆解析，土木学会論文集，No.557/V-34，pp.77-85，1997.2.

3) Dong，Q.，Matsui，K. and Yamamoto，K.: Time Domain Back-calculation of Pavement Structure Using 3D FEM with Ritz Vector Method，Finite Element Modeling of Pavement Structures， pp.451-463，Proceedings of the Second International Symposium on 3D Finite Element for Pavement Analysis，Design and Research，Charleston，West Virginia，October 11-13，2000.

4) 日本道路協会：アスファルト舗装要綱，1986.

5) 土木学会：舗装工学，1995.

(2001.7.23 受付)

DYNAMIC BACK-CALCULATION OF PAVEMENT STRUCTURE FROM SURFACE VELOCITIES OR ACCELERATIONS

Dong Q.X., Tsubokawa, Y., Hachiya, Y. and Matsui, K.

There are two approaches to back-calculate layer moduli from FWD data. One is called a static method which uses only peak values of both loading and surface deflections, and the other called a dynamic method utilizes time histories of loading and surface deflections. However, if time dependent data is used, velocities and/or

accelerations can also be served for this purpose. In order to measure surface deflections, a stationary point has to be selected. Velocities and accelerations can be easily measured. Furthermore, since the magnitude of those responses are much greater than that of deflections, it is easy to maintain accuracy. Thus, presuming velocities or accelerations are measured, a method to identify layer moduli from those data are presented and the results are discussed in this study.