## 鉛直および水平方向に円形等分布の荷重作用を受ける 舗装構造の弾性解析

松井邦人<sup>1</sup>・マイナ ジェイムス<sup>2</sup>・董勤喜<sup>3</sup>・小澤良明<sup>4</sup>

<sup>1</sup>フェロー会員 Ph.D. 東京電機大学 建設環境工学科 (〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町大字石坂)
 <sup>2</sup>正会員 工博 日本舗道株式会社 技術研究所 (〒140-0002 東京都品川区東品川 3-32-34)
 <sup>3</sup>Ph.D. 国土交通省 国土技術政策総合研究所 空港施設研究室 (〒239-0826 横須賀市長瀬 3-1-1)
 <sup>4</sup>工修 川田工業株式会社 工事部工事課 (〒550-0014 大阪市西区北堀江 1-22-19)

道路や滑走路のような舗装の表面に輪荷重のような鉛直荷重と制動荷重のような水平荷重が同時に作用する状態を想定している.舗装は多層弾性構造でモデル化できるものと仮定して,変位ポテンシャルを用いて理論的に解を誘導している.プログラム GAMES (General Analysis of Multi-layered Elastic Systems)を開発している.また,層と層の境界にはせん断ばねの形ですべりを導入することも可能である.理論構築は,重ね合わせの原理を用いており,鉛直分布荷重に対する解と水平分布荷重に対する解をそれぞれ求め,足し合わせている.作用荷重の最大数は100,考慮できる層数は100,応答を計算できる着目点数は1000である.

Key words : multi-layered elastic analysis, interface slips, mixed surface loadings, multiple loads

#### 1.はじめに

舗装の構造設計は,現在経験的方法から理論的方法に 移行する過程にある.1997年にGAO(General Accounting Office)はAASHTOの設計法は時代遅れであると指摘し, 3次元 FEM の積極的な導入を検討すべきであると提言 している<sup>1)</sup>.これを受けるように3D-FEM の国際シンポ ジュームがこれまでに2回米国で開催され<sup>2),3)</sup>,第3回目 のシンポジュームは2002年4月にオランダで開催される ことが決まっている.複雑な解析には3D-FEM が必要と なるが,一般に計算労力が膨大になり,精度良い結果を 得るにはかなりの経験が要求されるため,現在では実用 的であると言い難い.

アスファルト舗装を理論的に設計することを実用的な 観点から考えると,線形弾性論に基づくのが最も適切で あると思われる.わが国では,BISAR,CHEVRON,ELSA が良く知られている.シェル石油で開発され,市販され ている BISAR は機能上に制約があり,汎用的な機能のあ る BISAR は官学の研究機関に限定され利用できる環境 に制約がある.多層弾性解析で先駆的研究はBurnister<sup>4)</sup> によるものである.コンピュータもまだ開発されおらず, Burnister は応力関数を用いて軸対象の解を誘導し,解析 結果を図表の形で利用できるようにした.その後,コン ピュータが開発され,徐々に研究機関で利用できるよう になると,図表の活用から解析プログラムの利用に移行 していった.Burnister の理論がFortran でコード化され たものがCHEVRON として知られている 姫野教授開発 のELSAもBurmisterの理論がベースになっている.一方, 変位関数を用いて多層構造の軸対称解析のプログラム BISTRO が 1967 年に開発された.BISAR マニュアル<sup>5)</sup> によると,初期の BISTRO は表面において応力の解の精 度が悪く,その後改良がなされたと述べられている. BISTROを更に発展させたプログラムが BISAR と呼ばれ ているものである.BISAR では,表面に作用する荷重は 鉛直方向だけでなく,水平方向も考慮することができ, また,層と層の間のすべりも導入した解析を行うことが できる.

BISAR は,利用に関して制約があるものの,その汎用 性と高度な理論展開のため,高い評価を受けている.し かし、その精度についてこれまでほとんど第三者による 検証が行なわれてこなかったと言えるであろう.BISAR のユーザである著者等の一人は,層と層の間にすべりの パラメータの値を変化しても,解析結果への影響が小さ いことに疑問をもった.そこで,著者等も多層弾性解析 のプログラム開発を目指して研究に取り組んだ.昨年, CHEVRON や BISTRO と同じ軸対称解析のプログラム AAMES を開発した<sup>6</sup>.機能的な違いは, CHEVRON や BISTRO では層間すべりを考慮できないのに対して, AAMES ではBISAR と同じような考え方で層間すべり組 み込んでいる点である.その後,著者等は表面に円形等 分布する水平荷重する場合の理論解を誘導し,プログラ ム AMES (Analysis of Elastic Multi-layered Systems)を開発 した<sup>7</sup>.本研究では, AAMES と AMES の理論およびプ ログラムを統一的に書き直し,BISAR と同じ機能を有す るプログラムを開発することが目的である.このプログ ラムを GAMES (General Analysis of Multi-layered Elastic Systems)とよぶ.現在のプログラムは,荷重は最大 100 個,層数は最大 100 層,応答を求める着目点の数は 10000 点である.

## 2. 鉛直荷重が作用するとき

舗装を最下層が半無限,その上に複数の平行で有限な 厚さの層で構成され,すべての層が線形弾性挙動すると 仮定している.総層数はNであり,図-1のように最上層 を第1層,最下層を第N層とする.そして,図-2のよう に鉛直荷重が舗装表面に円形等分布しているとする.円 筒座標系(r, z)を用 $N, u \in r$ 方向変位, $w \in z$ 方向変位と すると,Navierの式は,

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{u}{r^2} = 0$$
(1)

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$$
(2)

ここに , vはポアソン比 ,  $\nabla^2$ は軸対象のラプラス演算子で

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
(3)

表面に円形等分布荷重が作用しているので,  $r \leq a$  において,

$$\sigma_{z}(r,0) = -p$$

$$\tau_{z}(r,0) = 0$$
(4a)

r > aにおいて,

$$\sigma_z(r,0) = \tau_{rz}(r,0) = 0$$
 (4b)

Michell の変位関数  $\phi$  を用いてu, w は次のよう表す.

$$u = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \tag{5}$$

$$w = 2(1-\nu)\nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$
(6)

ここに, φは重調和関数である. すなわち,

$$\nabla^4 \phi = 0 \tag{7}$$



図-1 舗装のN層モデル



図-2 鉛直方向の円形等分布荷重

応力成分は次のように記すことができる.

$$\frac{\sigma_r}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \phi \tag{8}$$

$$\frac{\sigma_{\theta}}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \phi \tag{9}$$

$$\frac{\sigma_z}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial z} \left( (2 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi$$
(10)

$$\frac{\tau_{zr}}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial r} \left( (1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi$$
(11)

ここでは,変位成分v,およびせん断応力  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{2\theta}$ は ゼロとなる.また, $\mu$ はせん断弾性係数であり,ヤング 係数 $E = 2\mu(1+v)$ の関係がある. の0次のハンケル変 換をGで表すと,

$-\xi^2 e^{-\xi z}$	$\xi(1-\xi z)e^{-\xi z}$	$\xi^2 e^{\xi z}$	$\xi(1+\xi_z)e^{\xi_z}$
$-\xi^2 e^{-\xi z}$	$-\xi(2-4\nu+\xi z)e^{-\xi z}$	$-\xi^2 e^{\xi z}$	$\xi(2-4\nu-\xi_z)e^{\xi z}$
$2\mu\xi^3 e^{-\xi z}$	$2\mu\xi^2(1-2\nu+\xi z)e^{-\xi z}$	$-2\mu\xi^3 e^{\xi z}$	$2\mu\xi(1-2\nu-\xi_z)e^{\xi_z}$
$2\mu\xi^3 e^{-\xi z}$	$2\mu\xi^2(-2\nu+\xi z)e^{-\xi z}$	$2\mu\xi^3 e^{\xi z}$	$2\mu\xi^2(2\nu+\xi z)e^{\xi z}$

**表-1** [*P*<sub>1</sub>]マトリクス

表-2  $[P_2]$ マトリクス

$-2\mu\xi^3 e^{-\xi_z}$	$2\mu\xi^2(1+2\nu-\xi_z)e^{-\xi_z}$	$2\mu\xi^3 e^{\xi z}$	$2\mu\xi^2(1+2\nu+\xi_z)e^{\xi_z}$
$-2\mu\xi^3e^{-\xi z}$	$2\mu\xi^2(1+4\nu-\xi_z)e^{-\xi_z}$	$2\mu\xi^3 e^{\xi z}$	$2\mu\xi^2(1+4\nu+\xi_z)e^{\xi_z}$

$$G(\xi, z) = \int r\phi(r, z) J_0(\xi r) dr$$
(12)

式(7)をハンケル変換して式(12)を考慮すると,

$$G(\xi, z) = (A + Bz)e^{-\xi z} + (C + Dz)e^{\xi z}$$
(13)

式 (5),(6),(10),(11) をハンケル変換して,式(13)の 関係を考慮すると,

$$\begin{cases} \int_{0}^{\infty} ru(r,z) J_{1}(\xi r) dr \\ \int_{0}^{\infty} rw(r,z) J_{0}(\xi r) dr \\ \int_{0}^{\infty} r\sigma_{z}(r,z) J_{0}(\xi r) dr \\ \int_{0}^{\infty} r\tau_{rz}(r,z) J_{1}(\xi r) dr \end{cases} = \begin{bmatrix} P_{1} \\ B(\xi) \\ B(\xi) \\ C(\xi) \\ D(\xi) \end{bmatrix}$$
(14)

ここに  $J_0$ ,  $J_1$ は 0 次および 1 次の Bessel 関数である.  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{\theta}$ に関しては次のような変換を考える.

$$\begin{cases} \int_{0}^{\infty} r(\sigma_{r} + \frac{2\mu u}{r}) J_{0}(\xi r) dr \\ \int_{0}^{\infty} r(\sigma_{r} + \sigma_{\theta}) J_{0}(\xi r) dr \end{cases} = \begin{bmatrix} P_{2} \end{bmatrix} \begin{cases} A(\xi) \\ B(\xi) \\ C(\xi) \\ D(\xi) \end{cases}$$
(15)

ここに , A, B, C, D は積分定数であり境界条件から決定 されるべきものである .また , [P<sub>1</sub>] は4×4のマトリック スで , その成分を表-1 に示す . [P<sub>2</sub>] は2×4のマトリッ クスであり , その成分を表-2 に示す .

式(14), (15)はすべての層で成立する.積分定数はそれ ぞれの層で異なり,層番号の添え字で区別する.これら の定数は,また  $\xi$ の関数でもある.最下層の第 n 層で は,z が大になるに従い,応力,変位はゼロに近づかな ければならない.したがって, $C_n = D_n = 0$ となる. また,舗装表面の境界条件をハンケル変換すると, ここに、

$$\overline{p}(\xi) = \int_0^\infty r p J_0(\xi r) dr = \frac{pa}{\xi} J_1(\xi a)$$
(17)

(16)

層と層の境界(例えば、第i層と第i+1層の境界)では, それぞれの層の上面を原点とする局所座標系を導入して,

 $\begin{cases} \overline{\sigma}_{z}^{1}(0,\xi) \\ \overline{\tau}_{rz}^{1}(0,\xi) \end{cases} = \begin{cases} -\overline{p}(\xi) \\ 0 \end{cases}$ 

$$\begin{cases} \overline{u}^{i}(h_{i},\xi) \\ \overline{w}^{i}(h_{i},\xi) \\ \overline{\sigma}_{z}^{i}(h_{i},\xi) \\ \tau_{rz}^{i}(h_{i},\xi) \end{cases} = \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{cases} \overline{u}^{i+1}(0,\xi) \\ \overline{w}^{i+1}(0,\xi) \\ \overline{\sigma}_{z}^{i+1}(0,\xi) \\ \tau_{rz}^{i+1}(0,\xi) \\ \tau_{rz}^{i+1}(0,\xi) \end{bmatrix}$$
(18)

ここに, h<sub>i</sub> は第i層の層厚である.また, [C] は接続 マトリックスであり, 層と層の間ですべりが生じないと き単位マトリックスとなる.すべりが生じるとき, せん 断ばねでモデル化する.

このとき,[C]は次のような式で表すことができる.

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_i \beta_i / (1 - \alpha_i) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(19)

ここに ,  $\alpha_i (0 \le \alpha_i < 1)$  はすべり度指数であり ,0 は完 全付着 ,1 に近づくほど摩擦が 0 に近づくことを意味し ている . また ,  $\beta_i$  は第i 層と第i+1層のせん断弾性係 数の逆数の平均を用いて

$$\beta_{i} = b^{*} \left( \frac{1 + v_{i}}{E_{i}} + \frac{1 + v_{i+1}}{E_{i+1}} \right)$$
(20)

と表し *b*<sup>\*</sup> は α<sub>i</sub>を無次元化するために導入したパラメー タであり,長さの単位を有する.計算では,複数の荷重 が作用するとき *b*<sup>\*</sup>に載荷半径の最大値を用いている.

荷重が作用するとき,境界条件を用いてそれぞれの層の積分定数A,B,C,Dを求め,ハンケル逆変換を用いて必要な力学諸量は計算することができる.その方法は文献(1)に述べられている.

## 3.水平荷重が作用するとき

荷重は舗装表面に平行に作用し,円形に一様に分布している.図-3のように座標系(x, y, z)を選び,分布荷重の中心は局所座標系原点に,荷重方向は局所座標系の x 軸と一致するように選択している.また,この z 軸を共有する円筒座標系(r, θ, z)を導入すると,任意の点における釣合式は次のような Navier 関係式で表すことができる.

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

$$\nabla^{2}v + \frac{1}{1 - 2v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{v}{r^{2}} - \frac{2}{r^{2}} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$
(22)

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1 - 2v} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (23)$$

ここに, vはポアソン比であり, u, v, w はそれそれ 円筒座標系 (r, θ, z) 軸方向の変位成分である. 舗装表面 ではせん断力が円形等分布しているので, 表面の境界条 件は

 $r \leq a$ において

$$\tau_{rz} = -q\cos\theta$$
  

$$\tau_{\theta z} = q\sin\theta$$
 (24a)  

$$\sigma = 0$$

また,r > aにおいては

$$\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = \sigma_z = 0 \tag{24b}$$

で与えることができる.

#### (1)変位および応力成分のHankel変換

式(1)を満たす変位を, Michellの関数のとBoussinesqの



図-3 水平方向の円形等分布荷重

関数 Ψ を用いて次のように表すことができる<sup>10</sup>.

$$u = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$
(25)

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \, \partial z} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$
(26)

$$w = 2(1-v)\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$
(27)

ここで、▽2は円筒座標系におけるラプラス演算子である.

$$\nabla^{2} = \frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial \theta^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}$$
(28)

関数  $\phi \geq \Psi$  を用いて円筒座標系の応力成分を表すと次のようになる.

$$\frac{\sigma_r}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \Phi - 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi \quad (29)$$

$$\frac{\sigma_{\theta}}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Phi + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi$$
(30)

$$\frac{\sigma_z}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial z} \left( (2 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi$$
(31)

$$\frac{\tau_{\theta_2}}{2\mu} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Psi$$
(32)

$$\frac{\tau_{zr}}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial r} \left( (1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \right) \Psi \qquad (33)$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{2\mu} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} \left( \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi + \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi$$
(34)

ここに, μはせん断弾性係数である.式(25)-(27)の変

位を,式(21)-(23)に代入して整理すると,

$$\nabla^4 \boldsymbol{\Phi} = 0 \tag{35}$$

$$\nabla^2 \Psi = 0 \tag{36}$$

が得られる.これらの関係式からのは重調和関数, 4は 調和関数であることがわかる.円形等分布荷重 q が一定 であることを考慮すると,

$$\Phi(r,\theta,z) = \phi(r,z)\cos\theta \tag{37}$$

$$\Psi(r,\theta,z) = \psi(r,z)\sin\theta \tag{38}$$

と書くことができる .  $(r, z), \psi(r, z)$  はそれぞれ重調和関数、調和関数である . この場合 ,  $(r, z), \psi(r, z)$ の Hankel 変換を

$$\int_0^\infty r\phi(r,z) J_1(\xi r) dr = G(\xi,z)$$
(39)

$$\int_0^\infty r\psi(r,z) J_1(\xi r) dr = H(\xi,z) \tag{40}$$

と書くと,式(39),(40)より,それらの解は

$$G(\xi, z) = (A + Bz)e^{\xi z} + (C + Dz)e^{-\xi z}$$
(41)

$$H(\xi, z) = Ee^{\xi z} + Fe^{-\xi z}$$
(42)

と示すことができる.

式(25)-(34)を再整理して Hankel 変換し,式 (39)-(42)の 関係を用いると式(43),(44)のような関係が得られ、この 関係は任意の層で成り立つ. は Hankel パラメータであ り、係数 *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* は,積分定数であり境界条件か ら決定する.

$$\begin{cases} \int_{0}^{\infty} r \left( \frac{u}{\cos \theta} + \frac{v}{\sin \theta} \right) J_{2}(\xi r) dr \\ \int_{0}^{\infty} r \left( \frac{u}{\cos \theta} - \frac{v}{\sin \theta} \right) J_{0}(\xi r) dr \\ \int_{0}^{\infty} r \left( \frac{w}{\cos \theta} \right) J_{1}(\xi r) dr \\ \int_{0}^{\infty} r \left( \frac{\sigma_{z}}{\cos \theta} \right) J_{1}(\xi r) dr \\ \int_{0}^{\infty} r \left( \frac{\tau_{\theta \xi}}{\sin \theta} + \frac{\tau_{zr}}{\cos \theta} \right) J_{2}(\xi r) dr \\ \int_{0}^{\infty} r \left( \frac{\tau_{\theta \xi}}{\sin \theta} - \frac{\tau_{zr}}{\cos \theta} \right) J_{0}(\xi r) dr \end{cases}$$

$$(43)$$

$$\begin{cases} \int_{0}^{\infty} r \left( \frac{\sigma_{r}}{\cos \theta} + \frac{1}{r} \frac{2\mu u}{\cos \theta} + \frac{1}{r} \frac{2\mu v}{\sin \theta} \right) J_{1}(\xi r) dr \\ \int_{0}^{\infty} r \left( \frac{\sigma_{r}}{\cos \theta} + \frac{\sigma_{\theta}}{\cos \theta} \right) J_{1}(\xi r) dr \\ \int_{0}^{\infty} r \left( \frac{\tau_{r\theta}}{\sin \theta} + \frac{1}{r} \frac{2\mu u}{\cos \theta} + \frac{1}{r} \frac{2\mu v}{\sin \theta} \right) J_{1}(\xi r) dr \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{2} \end{bmatrix} \begin{cases} A(\xi) \\ B(\xi) \\ B(\xi) \\ B(\xi) \\ B(\xi) \\ D(\xi) \\ E(\xi) \\ F(\xi) \\ F(\xi) \end{cases}$$

(44)

ここで,  $[Q_1]$ は 6×6 のマトリクスであり, その成分 を表-3 に示す.  $[Q_2]$ は 3×6 のマトリクスであり, その 成分を表-4 に示す.

舗装表面に作用している水平な等分布荷重式 q が作 用している.この荷重をハンケル変換すると,

$$\overline{q}(\xi) = \int_0^a r q J_0(\xi r) dr = \frac{qa}{\xi} J_1(\xi a)$$
(45)

$\xi^2 e^{\xi z}$	$\xi(1+\xi_z)e^{\xi_z}$	$-\xi^2 e^{-\xi z}$	$\xi(1-\xi z)e^{-\xi z}$	2 <i>ξe <sup>ξz</sup></i>	$2\xi e^{-\xi z}$
$-\xi^2 e^{\xi z}$	$-\xi(1+\xi z)e^{\xi z}$	$\xi^2 e^{-\xi z}$	$-\xi(1-\xi_z)e^{-\xi_z}$	$2\xi e^{\xi z}$	$2\xi e^{-\xi z}$
$-\xi^2 e^{\xi z}$	$-\xi(-2+\xi_z+4\nu)e^{\xi_z}$	ξ <sup>3</sup> e <sup>-ξz</sup>	$-\xi(2+\xi z-4\nu)e^{-\xi z}$	0	0
$-2\mu\xi^3 e^{\xi z}$	$-2\mu\xi(-1+\xi z+2\nu)e^{\xi z}$	$2\mu\xi^3 e^{-\xi z}$	$2\mu\xi^2(1+\xi_z-2\nu)e^{-\xi_z}$	0	0
$2\mu\xi^3 e^{\xi z}$	$2\mu\xi^2(\xi_Z+2\nu)e^{\xi_Z}$	$2\mu\xi^3 e^{-\xi z}$	$2\mu\xi^2(\xi z-2\nu)e^{-\xi z}$	$2\mu\xi^2 e^{\xi z}$	$-2\mu\xi^2 e^{\xi z}$
$2\mu\xi^3 e^{\xi z}$	$2\mu\xi^2(\xi z+2\nu)e^{\xi z}$	$2\mu\xi^3 e^{-\xi z}$	$2\mu\xi^2(\xi z-2\nu)e^{-\xi z}$	$-2\mu\xi^2 e^{\xi z}$	$2\mu\xi^2 e^{-\xi z}$

表-3  $[Q_1]$ マトリクス

**表-4**  $[Q_2]$ マトリクス

$-2\mu\xi^3 e^{\xi z}$	$2\mu\xi(1+\xi_z+2\nu)e^{\xi_z}$	$-2\mu\xi^3e^{-\xi z}$	$2\mu\xi^2(1-\xi z+2\nu)e^{-\xi z}$	0	0
$2\mu\xi^3 e^{\xi z}$	$2\mu\xi(1+\xi_Z+4\nu)e^{\xi_Z}$	$-2\mu\xi^3e^{-\xi z}$	$2\mu\xi^2(1-\xi_z+4\nu)e^{-\xi_z}$	0	0
0	0	0	0	$2\mu\xi^2 e^{\xi z}$	$2\mu\xi^2 e^{-\xi z}$

ハンケル変換した舗装表面の境界条件より,

$$\begin{vmatrix} \frac{\overline{\tau}_{\theta_{z}}^{(1)}(0,\xi)}{\sin\theta} + \frac{\overline{\tau}_{rz}^{(1)}(0,\xi)}{\cos\theta} \\ \frac{\overline{\tau}_{\theta_{z}}^{(1)}(0,\xi)}{\sin\theta} - \frac{\overline{\tau}_{rz}^{(1)}(0,\xi)}{\cos\theta} \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 \\ 2\overline{q}(\xi) \end{cases}$$
(46)

層と層の境界条件(例えばi番目とi+1番目の層)の境界では、それぞれの層の上面を原点とする局所座標系を導入して、変位と応力の連続条件を用いると次式のような関係が得られる.



ここに, h<sub>i</sub>は第 i 層の厚さ, [C]は接続マトリックスである.層と層の間にすべりが発生しないとき[C]は単位マトリックスであるが, すべりが生じるときには, せん断ばねモデルを想定して,



(48)

と表す .  $\beta_i$  は式(20)で表すことができる . また ,  $\alpha_i (0 \le \alpha_i < 1)$  はすべり度指数である .

式(43),(47) より, 表層(第1層)の応力・変位と, 最下層(第N層)の積分定数との関係を示す伝達マトリ クスを作成できる.最下層である第n層では,zが無限 大になると,応力,変位はゼロと考えられ(半無限層), 最下層(第n層)における積分定数は $A_n = B_n = E_n = 0$ と 求まる.

式(46)の境界条件を用いることで順次各層の積分定数  $A_{(\xi)}, B_{(\xi)}, C_{(\xi)}, D_{(\xi)}, E_{(\xi)}, F_{(\xi)}$ を算出できる. Hankel 逆変換を適応させることで,力学諸量を算出できる. 逆変換における半無限積分は AAMES, AMES では ガウス求積法を用いていたが,ここでは DE 積分法を用 いている.

#### 4. GAMES と BISAR の類似点と相違点

まず類似点から述べることにしよう.BISAR の特色の 1つは層と層の間のすべりを考慮した解析ができること である.クーロン摩擦は摩擦の最も標準的モデルである が,非線型であるため理論解に組み込むことは容易では ない.特に,複数の荷重が作用する場合の解を解析的に 求めることは不可能である.BISAR では,層と層の間の すべりを近似的にせん断ばねモデルで表している.せん 断ばねを導入することで解析の線形性が保たれるため, 理論解の導出が可能となる 著者等も BISAR と同様の考 え方に基づき,すべりモデルにせん断ばねを採用した. また 解法としてBISARは、円筒座標系で表現したNavier の式を,変位関数を用いて解いている.Burmisterのよう な応力関数より,変位関数の方が発展性が期待できると 考え,著者等も BISAR と同様に変位関数を用いている. Hankel変換と逆変換を利用して解く考え方も同じである.

BISAR の解法は、マニュアルにも詳細な説明がなく、 結果が複雑な形で与えられているので,理論展開を理解 することは不可能に近い. BISAR では式(37), (38)をθに 関して複素フーリエ級数を用いて表している このため, その後の展開は複素数を含んだものとなるが,本研究で はすべて実数で行うことができる.両者の基本的な違い は, Hankel 変換と Hankel 逆変換の適用の仕方にあり, その後の式の展開が大きく違ってきている。また, BISAR マニュアルの述べているように,表面付近では Hankel 逆変換の収束性が悪いため,精度良く応力を求めること は難しい.BISAR では、 が大きくなると同じ荷重条件 で半無限領域の解に近づくことを考慮して, 被積分関数 を収束性の良い頃と半無限領域の解とに分割し、最適な 積分区間を選んで Gauss 求積法を適用している . 著者等 は,この半無限積分を行うため,森らが開発した収束性 の良いDE積分<sup>9,10</sup>と呼ばれる新しい数値積分法 を用いることにより ,BISAR のような工夫をしなくとも 精度良く計算できることを確認した.

#### 5.例題

#### (1) 層と層の境界が完全付着

図-4のような3層構造の表面に鉛直荷重と水平荷重が 作用するような状態で解析を行う 制動荷重を想定して, 鉛直方向が49kN,水平方向が24.5kNの荷重が表面に作 用している.どちらの荷重も直径30cmの円に等分布し ているものとする.

解析結果の一部 u, w と G, を BISAR の結果と比較する 形で図-5 に示した .これらの図は r=0 における z 方向の 変化を示したものである 実線はGAMES の結果であり, BISAR の結果を 印で示している .図から明らかなよう に両者の結果は良く一致する .



(a) 載荷モデル





図-5 GAMES と BISAR の比較



図-6 GAMES のすべりが及ぼす影響



**図-7** BISAR のすべりが及ぼす影響

#### (2) 層境界すべりが生じるとき

図-4の構造と荷重条件で1層目と2層目の間にすべり が生じ,他の境界は完全付着の場合を考える.層間すべ り指数 α1の値を0.0,0.2,0.5,0.9 と変えて解析を行った.

GAMESで用いているすべりの定義はBISARと若干異 なると思われるが、どちらも 0.0 では完全付着であり、 1.0に近づくほど付着が全くない状態に近くなることで一 致している r=0.0 において GAMES と BISAR の結果の 一部 u,w と $\tau_{\pi}$ のz方向の変化をそれぞれ図-6 と図-7比 較した.GAMES では層間すべり指数が大きくなると、 鉛直方向の変位wが大きくなっていることを示している。 また、水平荷重の作用方向の変位u は第1層では若干大 きくなるが、第2層以下では小さくなる傾向を示してい る.一方、BISAR の結果は、層間すべり指数の値にかか わらずほとんど変化していない. $\tau_{\pi}$ に関しては、GAMES と BISAR の差は小さく、また層間すべり指数の値の如何 にかかわらず、両者の結果ともほとんどその差が現れな



い.また, <sub>で</sub>は第1層で急激に減少し,第2層以下では ほとんどゼロに近い値となっている.

#### 6. 複数の荷重作用時の応答

複数の荷重が作用時に(図-8)、荷重点と着目点を全体 座標系(X, Y, Z)の中に記すと図-9のようになる.図-8は 大型航空機 B-747-4-を参考に16点とし,荷重の作用位置 は文献(7)を参考として設定しており.Z軸は紙面に直行 しており右手系座標を用いている.複数の荷重が作用す る時,1つの荷重に着目しその荷重の作用位置を原点と する局所座標系(x, y, z)と局所円筒座標系( $r, \theta, z$ )を導入 する.変位と応力は( $r, \theta, z$ )座標系と座標系(X, Y, Z)の座標 変換マトリックス[S]を用いて次式のように表すことがで きる.

$$\begin{bmatrix} S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \theta) & \sin(\alpha + \theta) & 0 \\ -\sin(\alpha + \theta) & \cos(\alpha + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(49)  
変位は









$$\begin{cases} U(x, y, z) \\ V(x, y, z) \\ W(x, y, z) \end{cases} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix}^T \begin{cases} u(r, \theta, z) \\ v(r, \theta, z) \\ w(r, \theta, z) \end{cases}$$
(50)

応力は

$$\begin{bmatrix} \sigma_{X} & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{XY} & \sigma_{Z} & \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \sigma_{r} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_{\theta} & \tau_{\thetaz} \\ \tau_{rz} & \tau_{\thetaz} & \sigma_{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \end{bmatrix}$$
(51)

個々の荷重に対して,応答解析は円筒座標系(r,  $\theta$  z)で行い,得られた結果を全体座標系(X, Y, Z)に変換し,すべての荷重の影響はこの全体座標系で足し合わせを行うとで求めている.

以上に述べた理論を基にプログラムを開発し,今後こ のプログラムを GAMES (General Analysis of Multi-layered



図-11 GAMES と BISAR の応答量の比較

Elastic System) と呼ぶことにする. すべての層と層の境 界ですべりを導入することも可能である. このプログラ ムで出力できる応答量は全体座標系における変位応力, ひずみ、および主応力、主ひずみとそれ等の向きである.

#### 7.例题

#### (1) 複数の荷重が鉛直,水平荷重が作用するとき

ここで用いる舗装断面は図-10 に示してある.荷重配 置は上記で説明した通り、大型航空機 B-747-4-を参考に 16 点とし,荷重の作用位置は文献(7)を参考として設定し ており 図-8 に示した.荷重の大きさは鉛直方向227.5kN, 水平方向 113.75kN が直径 45.8cm に円形等分布すると設 定した.層間すべりがないものとして解析を行った.原 点X = Y = 0直下で応答量の一部のZ軸方向変化を図-11 に図示した.GAMES と BISAR の出力結果はよく一致し ていると明らかとなった.

### 8.結論

道路や滑走路のような舗装を想定して弾性多層構造の 表面に鉛直方向に円形等分布する場合,および水平方向 に円形等分布する場合について,著者らの理論を統一的 に再整理した.そして鉛直,水平方向の荷重が複数作用 するとき,舗装に発生する変形,応力を解析できるプロ グラム(GAMES)を開発した.本論文の例題はこのプログ ラムを用いて解析したものであり,その結果から次のよ うなことが明らかになった.

- 層と層の境界が密着しているとき GAMESとBISAR の出力結果は一般に良く一致している しかし BISAR から得られる舗装表面のせん断応力には不連続が現 われることがあり、境界条件の処理に問題があるように思われる.
- 表面にせん断力が作用するとき,その直下のせん断応力 τ<sub>rz</sub> は第1層で大きく変化し,2層目以下ではほぼゼロである.
- 5) 層と層の境界のすべり指数が大きいほど,鉛直方向の変位は大きくなる.
- 6) 層と層に境界すべりが生じると、すべり面より上の 水平変位は若干増加するが、逆にすべり面より下の 層の水平変位は若干減少する.この傾向は層間すべ り指数が大きいほど顕著になる.

謝辞:本研究は,運輸施設整備事業団「運輸分野における基礎的研究推進制度」のプロジェクト(2003-03)の一部として行った.このプロジェクトの関係者に謝意を表します.

#### 参考文献

- 1) GAO: Transportation Infrastructure Highway Pavement Design Guide Is Outdate, Report to the Secretary of Transportation, November, 1997, (邦訳:交通インフラストラクチャ 道路設計 指針は時代遅れ FWD に関する研究, FWD 研究会報告書, 1999)
- Shoukry, S.N. ed.: Finite Element for Pavement Analysis and Design, Proceedings of the First National Symposium on 3D Finite Element Modeling for Pavement Analysis & Design, Charleston, West Virginia, November 8-10, 1998.
- 3) Shoukry, S.N. ed.: Finite Element for Pavement Analysis and Design, Proceedings of the Second International Symposium on 3D Finite Element Modeling for Pavement Analysis & Design, Charleston, West Virginia, October 11-13, 2000.
- 4) Burmister, D. M.: The Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems and Applications to The Design of Airport Runways, Proc. of the 23<sup>rd</sup> Annual Meeting of Highway Research Board, 1943.
- De Jong, D.L.,Peutz, M.G.F. and Korswagen: *Computer Program BISAR*, Layered systems under normal and tangential loads, Koninklijke/Shell-Laboratorium, Amsterdam, 1979.
- 6) 森正武: Fortran 77 数値計算プログラミング(増補版), 岩波書 店, 2000.4
- Ooura,T. and Mori, M.: The Double Exponential Formula for Oscillatory Functions over Half Infinity Integral, Journal of Computational and Applied Mathematics 38, pp.353-360,1991.
- 8) 松井邦人,董勤喜,小澤良明,山峯明哲:層間すべりを考慮した軸対象弾性多層弾性構造の解析,土木学会舗装工学論文集,第5巻,pp.122-129,2000.
- 9) 松井邦人,董 勤喜,小澤良明,飯塚浩二:表面にせん断力 が作用する線形多層弾性構造の解析,(土木学会論文集に投稿 中)
- 10) 宮本 博: 3次元弾性論(第2版), 裳華房, 1977.3
- 財団法人航空振興財団:空港アスファルト舗装構造設計要 覧,1990.

(2001.7.23 受付)

# ELASTIC ANALYSIS OF A PAVEMENT STRUCTURE DUE TO VERTICAL AND HORIZONTAL SURFACE LOADINGS

#### Kunihito MATSUI, James MAINA, Qinxi DONG and Yoshiaki OZAWA

It is assumed that vertical loading such as wheel load and horizontal loading such as brake load are simultaneously applied at the surface of a road and runaway pavement. By using displacement potential, analysis is performed assuming that the pavement can be modeled as multi-layered elastic system and a program called GAMES (General Analysis of Multi-layered Elastic Systems) is developed. It is also possible to allow an interface slip in the form of shear spring. Theoretical analysis utilizes the principle of superposition and the solution is given by summing up the solution of vertically distributed loading and that of horizontally distributed loading. 10000 measurement points can be analyzed using a maximum of 100 loads and 100 pavement layers.