# 層間すべりを考慮した軸対称弾性多層構造の解析

# 松井邦人<sup>1</sup>·董勤喜<sup>2</sup>·小澤良明<sup>3</sup>·山峯明哲<sup>4</sup>

 1フェロー会員
 Ph.D. 東京電機大学建設環境工学科(〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町大字石坂)

 2正会員
 Ph.D. 東京電機大学建設環境工学科(〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町大字石坂)

 3学生会員
 東京電機大学理工学研究科建設工学専攻(〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町大字石坂)

 4学生会員
 東京電機大学理工学研究科建設工学専攻(〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町大字石坂)

舗装を線形弾性体の軸対称多層構造としてモデル化し, Michell の変位関数と Hankel 変換を用い て理論的に解を誘導し,変位,応力,ひずみを算出できるプログラム AAMES (Axi-symmetric Analysis of Multi-layered Elastic Analysis)を開発した.線形性を維持するため,層と層の間のすべ りにはせん断ばねを用いている.最大層数は路床を含め10層,輪荷重の数は最大30輪まで解析する ことが可能である.Hankel 逆変換が,荷重が作用する表面付近で解の精度に大きく影響することを 考慮し,この半無限積分の精度向上を検討している.また,解の精度は BISAR と比較することで確 認している.

Key Words : pavement evaluation, elastic layer, mechanistic models, AAMES

#### 1.はじめに

舗装の構造設計は,経験的手法から線形多層弾性 論に基づく理論的設計法へ移行する過程にある.線 形 多 層 解 析 と し て , わ が 国 で は BISAR, CHEVRON, ELSA が広く利用されている. ELSA と CHEVRON は軸対称で,層間すべりが考慮でき ないのに対し, BISAR は軸対称だけでなく非対称 解析も可能で,また層と層の間のすべりもせん断ば ねの形ではあるが考慮することができ,舗装技術者 の間で最も信頼されている解析ソフトである.しか し,広く一般に公開されていないため,利用者が限 られている.

本研究では、層間すべりも組み込んだ軸対称多層 弾性解析ができる実用的なソフト開発を目的とし ている.この理論は、理論としての顕著な新規性は ない.しかし、プログラム開発に関して、解析精度 を確保する上での問題点を明らかにし、精度確保を 工夫していること、また層間すべりを組込んだこと が特徴である.

今後,路盤・路床における拘束圧の影響や表・基 層の温度分布による弾性係数の分布の影響を考慮 した解析,および逆解析による構造評価,さらに非 対称多層弾性解析への拡張,などを実施する上で, 理論から応答を定量的に精度良く算出することに 関する問題点を確認し,対処する方法を検討するこ とは重要である.

本論文では、舗装構造を円形等分布荷重が表面に

作用する多層弾性構造としてモデル化し, Michell の変位関数と Hankel 変換を用いて理論解を誘導 している.表面に作用する輪数は,2005年に次世 代の大型航空機 A3XX-200 が開発されることを考 慮して,輪荷重の個数は最大で30個,着目点数は 最大100点,層数は最大10層までの解析が可能で ある.

本研究で開発したソフトウエア(AAMES)を用いて例題を解き,BISARの出力結果と比較して良い一致度が確認できている.

#### 2. 軸対称多層弾性理論

## (1)軸対称弾性理論

軸対称弾性問題の変位と応力成分は,水平方向 r および鉛直方向 z の変位  $u_r$ ,  $u_z$ , と r 方向の垂直応 力  $\sigma_r$ , z 方向の垂直応力  $\sigma_z$ ,回転方向  $\theta$  の垂直応 力  $\sigma_{\theta}$ , およびせん断応力  $\tau_{rz}$ である. Michell の変 位関数  $\Phi$  (r, z) を用いると,  $u_r$ ,  $u_z$  は <sup>1),2)</sup>

$$\mathbf{u}_{\mathrm{r}} = -\mathbf{\Phi}_{\mathrm{rz}} \tag{1}$$

$$\mathbf{u}_{z} = 2(1-\nu)\nabla^{2}\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}_{zz}$$
(2)

また,応力を次式のように書くことができる.

$$\sigma_{\rm r} = \lambda V^2 \Phi_{\rm z} - 2(\lambda + \mu) \Phi_{\rm rrz}$$
(3)

$$\sigma_{z} = (3\lambda + 4\mu)\nabla^{2}\Phi_{z} - 2(\lambda + \mu)\Phi_{zzz} \qquad (4)$$

$$\sigma_{\theta} = \lambda \nabla^2 \Phi_{z} - \frac{2}{r} (\lambda + \mu) \Phi_{zr}$$
 (5)

$$\tau_{\rm rz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi - 2(\lambda + \mu) \Phi_{\rm zzr} \qquad (6)$$

ここに, **Φ** は次の関係式を満足する重調和関数である.

$$\nabla^4 \Phi = 0 \tag{7}$$

上式は  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ に関する 4 階の偏微分方程式である. この式に Hankel 変換を適用すると,

$$\int_{0}^{\infty} r\nabla^{4} \mathbf{\Phi}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \mathbf{J}_{0}(\boldsymbol{\xi}\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$
$$= \left(\frac{d^{2}}{dz^{2}} - \boldsymbol{\xi}^{2}\right)^{2} \int_{0}^{\infty} r \mathbf{\Phi}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \mathbf{J}_{0}(\boldsymbol{\xi}\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (8)$$

式(7)より $abla^4\Phi=0$ であるから,式(8)は

$$\left(\frac{d^{2}}{dz^{2}} - \xi^{2}\right)^{2} G(\xi, z) = 0$$
 (9)

ここに,

$$G(\xi, z) = \int_0^\infty r \mathbf{\Phi} J_0(\xi r) dr$$
(10)

すなわち ,  $G(\xi,z)$ は  $\Phi(r,z)$ に関する 0 次の Hankel 変換である . 式(9)より

$$G(\xi, z) = (A + Bz)e^{-\xi z} + (C + Dz)e^{\xi z}$$
 (11)  
 $u_r \mathcal{O}$  Hankel 変換を $\overline{u}_r$ で表わす.式(1)より

$$\overline{\mathbf{u}}_{\mathrm{r}} = \int_{0}^{\infty} r \, \mathbf{u}_{\mathrm{r}} \, \mathbf{J}_{1} \, (\boldsymbol{\xi} \, \mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi} \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z} \tag{12}$$

 $u_z$ の Hankel 変換を $\overline{u}_z$ とすると,式(2)より

$$\overline{\mathbf{u}}_{z} = \int_{0}^{\infty} \mathbf{r} \, \mathbf{u}_{z} \mathbf{J}_{0} \, (\boldsymbol{\xi} \, \mathbf{r}) d\mathbf{r}$$
$$= (1 - 2\nu) \frac{d^{2}G}{dz^{2}} - 2(1 - \nu) \boldsymbol{\xi}^{2} G \qquad (13)$$

 $\sigma_z$ の Hankel 変換  $\overline{\sigma}_z$ は,式(4)より

$$\overline{\sigma}_{z} = \int_{0}^{\infty} r \,\sigma_{z} J_{0} \left(\xi r\right) dr$$
$$= \frac{E(1-\nu)}{1+\nu} \frac{d^{3}G}{dz^{3}} - \frac{E(2-\nu)}{1+\nu} \xi^{2} \frac{dG}{dz} \qquad (14)$$

 $au_{
m rz}$ の Hankel 変換 $ar{ au}_{
m rz}$ は,式(6)より

$$\begin{aligned} \overline{\tau}_{rz} &= \int_{0}^{\infty} r \tau_{rz} J_{1}(\xi r) dr \\ &= \frac{E \nu}{(1+\nu)} \xi \frac{d^{2}G}{dz^{2}} - \frac{E}{(1+\nu)} \xi^{3}G \\ \vec{\pi}(11) \mathcal{E}\vec{\pi}(12) \sim \vec{\pi}(15) \mathbb{L} \mathcal{K} \lambda \, \mathsf{L} \tau \, \mathfrak{E}$$

$$\begin{cases} \overline{u}_{r}(z,\xi) \\ \overline{u}_{z}(z,\xi) \\ \overline{\sigma}_{z}(z,\xi) \\ \overline{\tau}_{rz}(z,\xi) \end{cases} = [P(E,\nu)][Q(z,\nu,\xi)][R(z,\xi)] \begin{cases} A \\ B \\ C \\ D \end{cases}$$
(16)

$$\begin{aligned} \Xi \Xi [\Xi, \\ & \left[ P \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1+\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{1+\nu} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17} \\ & \left[ Q \right] = \begin{bmatrix} -1 & 1-\xi z & 1 & 1+\xi z \\ -1 & -2+4\nu-\xi z & -1 & 2-4\nu-\xi \\ \xi & \xi(1-2\nu+\xi z) & -\xi & \xi(1-2\nu-\xi z) \\ \xi & \xi(-2\nu+\xi z) & \xi & \xi(2\nu+\xi z) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{18} \\ & \left[ R \right] = \begin{bmatrix} \xi^2 e^{-\xi z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi e^{-\xi z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 e^{\xi z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi e^{\xi z} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

 $\overline{u}_{r}, \overline{u}_{z}, \overline{\sigma}_{z}, \overline{\tau}_{rz}$ の Hankel 逆変換は,次のようになる.

$$\mathbf{u}_{\mathrm{r}} = \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{\xi} \, \overline{\mathbf{u}}_{\mathrm{r}} \mathbf{J}_{1} \, (\boldsymbol{\xi} \, \mathbf{r}) \mathrm{d} \boldsymbol{\xi} \tag{20}$$

$$\mathbf{u}_{z} = \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{\xi} \, \overline{\mathbf{u}}_{z} \mathbf{J}_{0} \, (\boldsymbol{\xi} \, \mathbf{r}) \mathbf{d} \boldsymbol{\xi}$$
(21)

$$\sigma_{z} = \int_{0}^{\infty} \xi \,\overline{\sigma}_{z} J_{0}(\xi r) d\xi$$
(22)

$$\tau_{\rm rz} = \int_0^\infty \xi \,\overline{\tau}_{\rm rz} \, J_1(\xi r) d\xi \tag{23}$$

# (2)多層構造への拡張

図-1 に示す多層弾性構造を考える.i番目の層で は,式(16)より

$$\begin{cases} \overline{u}_{r}^{i}(z,\xi) \\ \overline{u}_{z}^{i}(z,\xi) \\ \overline{\sigma}_{r}^{i}(z,\xi) \\ \overline{\tau}_{rz}^{i}(z,\xi) \end{cases} = \left[ P(E_{i},\nu_{i}) \right] \left[ Q(z,\nu_{i},\xi) \right] \left[ R(z,\xi) \right] \left[ \begin{array}{c} A_{i}(\xi) \\ B_{i}(\xi) \\ C_{i}(\xi) \\ D_{i}(\xi) \end{array} \right]$$
(24)



i番目とi+1番目の層の境界では、それぞれの層の 上面を原点とする局所座標系を導入して、

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{u}}_{r}^{i}(\mathbf{h}_{i},\boldsymbol{\xi}) \\ \overline{\mathbf{u}}_{z}^{i}(\mathbf{h}_{i},\boldsymbol{\xi}) \\ \overline{\mathbf{\sigma}}_{z}^{i}(\mathbf{h}_{i},\boldsymbol{\xi}) \\ \tau_{rz}^{i}(\mathbf{h}_{i},\boldsymbol{\xi}) \end{cases} = \begin{bmatrix} C \\ \overline{\mathbf{u}}_{r}^{i+1}(0,\boldsymbol{\xi}) \\ \overline{\mathbf{u}}_{z}^{i+1}(0,\boldsymbol{\xi}) \\ \overline{\mathbf{\sigma}}_{z}^{i+1}(0,\boldsymbol{\xi}) \\ \tau_{rz}^{i+1}(0,\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}$$
(25)

ここに,  $h_i li 番目の層の層厚である.また, [C]$ は接続マトリックスであり,すべりが生じないとき,単位マトリックスとなる.

さらに, zが無限大になると, 応力, 変位はゼロ と考えられるので, 最下層(第N層)では,  $C_n = D_n = 0$ となる.舗装表面において半径 aの 円形に等分布荷重 p が作用しているとすると, Hankel 変換により,

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_{z}^{1}(0,\xi) \\ \overline{\tau}_{rz}^{1}(0,\xi) \end{cases} = \begin{cases} \overline{p}(\xi) \\ 0 \end{cases}$$
 (26)

ここに,

$$\overline{p}(\xi) = \int_0^a r p J_0(\xi r) dr = \frac{pa}{\xi} J_1(\xi a)$$
(27)

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{u}}_{r}^{1} \\ \overline{\mathbf{u}}_{z}^{1} \\ \overline{\mathbf{\sigma}}_{z}^{1} \\ \overline{\mathbf{\tau}}_{rz}^{1} \end{cases} = \begin{cases} \overline{\mathbf{u}}_{r}^{1} \\ \overline{\mathbf{u}}_{z}^{1} \\ \overline{\mathbf{p}}(\xi) \\ 0 \end{cases} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n} \\ \mathbf{B}_{n} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}$$
(28)
$$\begin{cases} \mathbf{A}_{n} \\ \mathbf{B}_{n} \\ \mathbf{B}_{n} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{31} & t_{32} \\ t_{41} & t_{42} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \overline{\mathbf{p}}(\xi) \\ \mathbf{0} \\ \end{bmatrix}$$
(29)

式(24),(25)の関係を順次適用させると式(28)となる.式(29)より $A_n, B_n$ が計算できると,順次各層の $A_i, B_i, C_i, D_i$ を計算することができる.

## 3. プログラム開発

プログラム開発上注意することは 2 点ある .1 つ は [R] の中の指数関数 e<sup>ξz</sup> であり, もう 1 つは Hankel 逆変換の半無限積分である.指数関数は半 無限積分の中にあり,計算処理に工夫が必要である. 指数部の値が大きくなりすぎると,計算ができなく なったり計算精度が悪くなる.このため次のような 2 つの工夫を行っている.

(1).各層の上面を原点とする局所座標系の導入(2).無次元化パラメータbを導入

局所座標系を用いることにより, zの値を小さく 保つことができる.また,無次元化を行うことによ り,指数部の値の制御が可能である.無次元化パラ メータとして,BISARでは荷重が円形等分布して, その載荷半径を選択しているが,他の論文<sup>3)</sup>には1 層目の層厚を選んでいるものもある.無次元化パラ メータの選択が解析精度に影響を与える可能性も あるので,ここでは,ユーザが任意に設定できるよ うにしている.

Hankel 逆変換は半無限積分であり,これは一般に次のように表わすことができる.

Int = pa 
$$\int_0^\infty J_0(\xi r) J_1(\xi a) f(\xi z) d\xi$$
 (30)

ここでa は荷載半径を示す

指数関数は f( $\xi$ z) に含まれており, この積分は, 解 析的に行うことができないため数値積分が必要と なる.解析精度はこの数値積分を如何に精度良く行 うかにかかっている.この積分の精度は表面 (z=0)付近で悪くなる.数値積分の方法として Newton-Coates 公式と Gauss 積分公式がある. Newton-Coates 公式の代表的なものに台形公式, Simpson 公式がある.米国陸軍工兵隊水路実験所 (The U.S. Army Engineers Experiment Station) では WESLEA<sup>3)</sup>を開発しているが, Newton-Coates 公式の一種で, 5次の多項式まで 正確に積分できる Weddle 公式を用いている.一方





図-3 ベッセル関数と振幅関数

BISAR<sup>4)</sup>の中では Gauss- Legendre 積分が用いら れている .AAMES でも Gauss-Legendre 積分を組 み込み ,20 次の多項式まで精確に積分できる 10 点 公式を用いている .どの積分公式を用いても ,半無 限領域の積分を有限領域の積分で近似することに なる .この数値積分を行う上で重要なことは ,積分 領域と収束判定である .

積分領域を検討するにあたり,図-2のモデルを 用い,一番解析精度が悪い $\sigma_z$ に注目し, r=0.33,z=0.0のとき、式(30)の各関数 $J_0(\xi r)$ ,  $J_1(\xi a)$ , f( $\xi z$ )が,  $\xi$ によりどのように変化する かを図-3に示した.同図より,f( $\xi z$ )の値は $\xi$ =0 のとき,最大値-5.75 [MPa]を取り,  $\xi$ が大きく なるにつれ急速にゼロに近づいている.Bessel 関 数は $\xi$ が大きくなるにつれ振動しながらゼロに近 づくが,f( $\xi z$ )と比べその収束速度は遅い.そこで WESLEAでは, $|f(\xi z)| < 0.000001$ を目安にしてい る.AAMESでは,積分の上限値を徐々に増加し, 増加率が0.0001以下になるか, $\xi$ の値が200を超 えると計算を打ち切っている.

積分間隔は WESLEA では表・基層の弾性係数と 他の層の弾性係数との比で変えているが, AAMES では $J_0(\xi r)$ の根を求め, 隣接する2つの根の間を 積分間隔としている.積分間隔が積分値に与える影 響を調べるため,  $\sigma_z$ に関して, AAMES で積分間 隔を2.0 としたものと上に述べたように $J_0(\xi z)$ の 隣接2根の間隔としたものを比較し,その結果を図 -4 に記した.同図には比較のため BISAR とELSA の結果も併記した.積分間隔2.0 では $\sigma_z$ の精度が 悪いが,  $J_0(\xi z)$ の根を用いることにより,精度が 大きく改善され, BISAR やELSA の結果とほぼ同 じである.

#### 4.層間すべりモデルの挿入

すべりのモデルとして Coulomb 型がしばしば用 いられる .しかし ,このモデルは非線型であるので ,



図-4 各ソフトの解析誤差 ( <sub>z</sub>)

BISAR と WESLEA では層間にせん断ばねが挿入 されている .AAMES でも同様にせん断ばねを用い ることとし ,すべての層と層の間にすべりが起こる 可能性があることを想定して ,式(31)のようにせん 断ばねを導入している .

$$(1 - \alpha_{i}) \left\{ u_{r}^{i}(h_{i}) - u_{r}^{i+1}(0) \right\} = \alpha_{i} \beta_{i} \tau_{rz}^{i}(h_{i}) \quad (31)$$

 $\alpha_i$ はすべり度指数で,0は完全付着,1 に近づく ほど摩擦が0に近づく. $\tau_{rz}^i(h_i)$ はi番目とi+1番 目間の層のせん断応力,また $\alpha_i$ が無次元となるよ うに, $\beta_i$ を次のように選択している.

$$\beta_{i} = b^{*} \left( \frac{1 + \nu_{i}}{E_{i}} + \frac{1 + \nu_{i+1}}{E_{i+1}} \right)$$
(32)

ここに,括弧内はi番目とi+1番目の層のせん断弾 性係数の平均であり,b<sup>\*</sup>は輪数が複数ある時最大 の載荷半径を用いている.b<sup>\*</sup>に無次元化に使用す るパラメータを用いると,すべり度 $\alpha_i$ が同じでも 無次元化パラメータの値を変えるとすべりの程度 が変わることになるので好ましくない.したがって, b<sup>\*</sup>の値を最大載荷半径に固定している.

第i層とi+1層の間の接続状態を次のように表わ すことができる.

$$\begin{cases} \left\{ u_{r}^{i}(h_{i}) \\ u_{z}^{i}(h_{i}) \\ \sigma_{z}^{i}(h_{i}) \\ \tau_{rz}^{i}(h_{i}) \\ \tau_{rz}^{i}(h_{i}) \\ \tau_{z}^{i+1}(0) \\ \tau_{z$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_{i}\beta_{i}/(1-\alpha_{i}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(34)

を接続マトリックスと呼ぶ.

すべりの影響を見るため,図-2のモデルの1層 目と2層目の間の境界にすべりが発生する場合と, 3層目と4層目にすべりが発生する場合について解

こ

析を行っている.それらの結果を図-5 に示した. 図-5(a),図-5(c)より,すべり度 iが1に近づく ほど表面たわみが大きくなることが明らかである. またすべりが浅いところで生じるほど,すべりによ り表面たわみは増加する傾向が見られる.しかし, 深いところで生じるすべりは遠くまで表面たわみ に影響がある.図-5(b),図-5(d)はすべりが生じて いる境界面のせん断応力を示している.これらの図 よりすべり度が大きくなるほどせん断応力はゼロ に近づき,すべりが生じやすくなることを裏付けて いる.

BISAR を用いて,1層目と2層目の間にすべり

が発生するとして同様の解析を行い、その結果を図 -6 に図示した.すべりのモデルの表現が BISAR と AAMES では若干異なるので、同じ図に描くことは あまり意味がない.すべりがない時(α=0)、表面 たわみ、境界のせん断応力とも BISAR と AAMES は良く一致する.しかし、すべりが生じると両者の 間の差が大きくなっている.BISAR ですべりを大 きくしても表面たわみへの影響は比較的小さく、 BISAR の境界せん断応力は AAMES と比べゼロに 近づかない.層と層の境界が完全にすべりがあると き、せん断応力がゼロになることを考えると、 BISAR の結果は、必ずしもこの傾向を示している



(a)1-2 層間にすべりを考慮した時の表面たわみ (b)1-2 層間にすべりを考慮した時の層間に働くせん断応力



(c)3-4 層間にすべりを考慮した時の表面たわみ (d)3-4 層間にすべりを考慮した時の層間に働くせん断応力 図-5 AAMES のすべりが及ぼす影響



(a)1-2 層間にすべりを考慮した時の表面たわみ (b)1-2 層間にすべりを考慮した時の層間に働くせん断応力 図-6 BISAR のすべりが及ぼす影響

とは言えない。利用の仕方あるいはプログラムの上 で問題があると思われるが、原因は不明である。

#### 5. 複数荷重作用の応答解析

#### 5.1 理論

図-7 は荷重点と着目点を全体座標系 (X,Y,Z) の中に記したものである.複数の荷重が作用する時, 1 つの荷重に着目しその荷重の作用位置を原点と する局所デカルト座標系 (x,y,z) と局所円筒座標 系 (r,θ,z)を導入する.軸対称解析は円筒座標系で 行い,得られた結果を (x,y,z) 座標系に変換,さら に全体座標系に変換する. (r,θ,z) 座標系の応力と

(x, y, z)座標系の応力は次式のように表わすことができる.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{z} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \sigma_{r} & 0 & \tau_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta} & 0 \\ \tau_{rz} & 0 & \sigma_{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} (35)$$

$$= \begin{bmatrix} 1_{1} & 1_{2} & 1_{3} \\ m_{1} & m_{2} & m_{3} \\ n_{1} & n_{2} & n_{3} \end{bmatrix}$$
(36)

ここで, l,m,n は (x,y,z) 座標系に対する (r,θ,z) 座標系座標軸の方向余弦を示している.



表-1 AAMES と BISAR の比較

	Х	Υ	Ζ	Ux	Uy	Uz	σx	σy	σz	τху	τxz	τyz
単位層番号	cm	cm	cm	cm	cm	cm	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
1	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00	8.39E-02	-1.34E+00	-1.08E+00	-6.93E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.00E+00	0.00E+00	8.36E-02	-1.34E+00	-1.09E+00	-6.93E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
1	20	0	0	-3.88E-03	-1.20E-11	7.62E-02	-4.35E-01	-5.09E-01	0.00E+00	4.94E-11	0.00E+00	0.00E+00
				-3.88E-03	0.00E+00	7.62E-02	-4.31E-01	-5.05E-01	5.61E-03	0.00E+00	9.90E-14	0.00E+00
1	0	0	26	0.00E+00	0.00E+00	8.10E-02	7.50E-01	6.01E-01	-1.30E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.00E+00	0.00E+00	8.08E-02	7.50E-01	6.02E-01	-1.30E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
2	0	0	26	0.00E+00	0.00E+00	8.10E-02	2.16E-02	4.97E-03	-1.30E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	U			0.00E+00	0.00E+00	8.08E-02	2.17E-02	4.99E-03	-1.30E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
1	20	0	26	3.56E-03	1.68E-11	7.63E-02	3.44E-01	4.15E-01	-8.24E-02	5.70E-11	-4.71E-02	-1.77E-10
				3.56E-03	0.00E+00	7.63E-02	3.44E-01	4.15E-01	-8.24E-02	0.00E+00	-4.71E-02	0.00E+00
2	20	0	26	3.56E-03	1.68E-11	7.63E-02	-8.55E-04	7.02E-03	-8.24E-02	9.29E-11	-4.71E-02	-1.77E-10
				3.56E-03	0.00E+00	7.63E-02	-8.76E-04	7.00E-03	-8.24E-02	0.00E+00	-4.71E-02	0.00E+00
1	-20	0	26	-3.56E-03	1.68E-11	7.63E-02	3.44E-01	4.15E-01	-8.24E-02	-5.70E-11	4.71E-02	-1.77E-10
				-3.56E-03	0.00E+00	7.63E-02	3.44E-01	4.15E-01	-8.24E-02	0.00E+00	4.71E-02	0.00E+00
2	-20	0	26	-3.56E-03	1.68E-11	7.63E-02	-8.55E-04	7.02E-03	-8.24E-02	-9.29E-11	4.71E-02	-1.77E-10
				-3.56E-03	0.00E+00	7.63E-02	-8.76E-04	7.00E-03	-8.24E-02	0.00E+00	4.71E-02	0.00E+00

上段 BISAR<sup>\*</sup> 下段 AAMES 個々の荷重に対してこのような解析を行い,最後 に全体座標系の着目点で応答結果の足し合わせを 行っている.

#### 5.2 例題1

図-2(b)の断面で,表面に図-8のように2個の荷 重が表面に作用している状態で応答解析を行う. 表-1にAAMESとBISARで得られた結果を比較 している. $u_z$ , $\sigma_x$ に若干違いが見られるものの, ほとんどすべての点で変位,応力とも良い一致が確 認できている.

## 5.3 例題 25)

ほとんどの多層弾性解析ソフトは表面に作用す る荷重数,舗装の層数,着目点数にかなり厳しい制 限を設けているが,それは過去のコンピュータの性 能も影響しているのであろう.しかし,AAMES で は,PCの性能が飛躍的に進歩したことを考慮して, 最大作用荷重数を30,最大層数10,応答を計算す る最大着目点数を100としている.

例題として図-2(b)の断面を考える.荷重配置は 大型航空機 B-747-400 を参考に16点とし,荷重の 作用位置は図-9 に示した。なお荷重の大きさは P=227.5kN とし、直径45.8cm に円形等分布する としている。応答計算の着目点は22点であり,す べて1層目にある 計算した結果を表-2に記した. このような問題は著者等の手元の BISAR では,配 列が十分に大きくないため計算できないので, AAMES の結果だけを示している.表-2 の結果を 詳しく見ると,荷重作用のない表面においてゼロと なるべき zの値が,必ずしもそのようになってい ない.これは,表面近くで式(30)の積分精度が十分 に確保できていないためである.しかし,図-4の 結果から判断すると,表面より1cm 以上内部の点 における出力結果は正しいと考えて良い.



図-9 載荷位置[cm]

表-2	AAMES	による	解析結果
-----	-------	-----	------

	Х	Υ	Z	Ux	Uy	Uz	σx	σу	σz	τxy	τxz	τyz
単位層番号	cm	cm	cm	cm	cm	cm	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
1	0	0	0	8.14E-03	-1.95E-18	3.79E-01	-3.82E-02	7.90E-02	-2.24E-02	0.00E+00	-2.05E-14	-9.48E-30
1	307	0	0	-4.53E-03	-4.34E-19	4.16E-01	-5.15E-02	2.07E-01	2.42E-02	0.00E+00	-1.89E-15	1.24E-30
1	233	328	0	3.38E-03	1.50E-02	7.36E-01	-2.74E+00	-2.65E+00	-1.32E+00	-2.24E-02	2.55E-14	3.25E-16
1	307	328	0	-9.02E-03	1.29E-02	6.93E-01	-1.27E-01	-7.00E-01	4.22E-02	-5.27E-02	-6.41E-14	-8.42E-14
1	381	328	0	-2.11E-02	1.05E-02	6.85E-01	-2.79E+00	-2.75E+00	-1.40E+00	-9.43E-02	-4.04E-14	-2.49E-14
1	233	384	0	1.26E-03	2.37E-03	7.46E-01	-1.05E+00	-4.63E-01	-1.45E-02	-1.15E-01	3.98E-15	-2.98E-14
1	307	384	0	-1.08E-02	-1.02E-03	7.20E-01	-1.86E-01	-5.65E-01	6.67E-02	-6.12E-02	1.81E-14	1.99E-14
1	381	384	0	-2.30E-02	-2.82E-03	6.80E-01	-1.08E+00	-5.07E-01	-5.01E-02	-3.74E-02	7.51E-14	-8.07E-14
1	233	440	0	-3.13E-03	-1.19E-02	7.68E-01	-2.67E+00	-2.78E+00	-1.35E+00	-1.71E-01	1.24E-14	-4.15E-14
1	307	440	0	-1.26E-02	-1.57E-02	7.05E-01	-6.47E-02	-7.39E-01	5.12E-02	-5.29E-02	5.19E-15	-8.66E-14
1	381	440	0	-2.30E-02	-1.66E-02	6.86E-01	-2.72E+00	-2.76E+00	-1.37E+00	3.14E-02	-1.05E-13	-5.34E-14
1	0	0	26	9.37E-04	0.00E+00	3.79E-01	-5.16E-02	-6.65E-02	1.31E-04	-1.71E-19	-4.03E-05	-1.06E-20
1	307	0	26	-1.33E-03	5.42E-20	4.17E-01	-4.79E-02	-1.14E-01	-2.65E-04	1.71E-19	3.36E-05	-9.31E-20
1	233	328	26	-4.32E-03	-1.13E-02	7.30E-01	1.59E+00	1.54E+00	-3.39E-01	2.08E-03	1.81E-02	3.60E-02
1	307	328	26	1.27E-05	-1.04E-02	6.95E-01	-3.01E-01	2.71E-01	-6.49E-02	2.05E-02	-1.41E-03	3.26E-02
1	381	328	26	4.47E-03	-9.61E-03	6.79E-01	1.61E+00	1.57E+00	-3.38E-01	4.51E-02	-2.18E-02	3.27E-02
1	233	384	26	-3.49E-03	-5.34E-03	7.47E-01	5.08E-01	-1.74E-01	-1.12E-01	5.19E-02	1.63E-02	5.44E-03
1	307	384	26	6.96E-04	-3.88E-03	7.21E-01	-2.14E-01	8.90E-02	-6.01E-02	2.45E-02	-2.73E-03	1.28E-03
1	381	384	26	5.32E-03	-3.19E-03	6.81E-01	5.46E-01	-1.45E-01	-1.10E-01	1.22E-02	-2.44E-02	1.50E-04
1	233	440	26	-1.29E-03	1.23E-03	7.62E-01	1.52E+00	1.57E+00	-3.41E-01	9.10E-02	7.78E-03	-2.65E-02
1	307	440	26	1.44E-03	2.94E-03	7.06E-01	-3.34E-01	2.81E-01	-6.56E-02	2.32E-02	-4.46E-03	-3.02E-02
1	381	440	26	5.15E-03	3.34E-03	6.80E-01	1.59E+00	1.57E+00	-3.38E-01	-2.37E-02	-2.26E-02	-3.25E-02

#### 6.結論

軸対称弾性多層問題の解を Michell の変位関数 と Hankel 変換により解析的に誘導し,コード化した.理論は厳密であるものの,解析解を精度良く定 量的に算出する上で問題点が明らかになった.問題 点とその対処法を整理すると次のようになる.

- (1).指数関数の値が大きくなりすぎることを制御 するため,各層の上面を原点とする局所座標 系を導入し,また無次元化パラメータを用い て長さの尺度を無次元した.
- (2).半無限領域の積分を行うのに,隣接する $J_0$ の 根を積分区間として,Gauss-Legendre 積分を 適用することで,解析精度の向上を図ること ができた.

AAMES は層と層の間にはせん断ばねモデルを 挿入しすべりを近似的に考慮できるようにした. BISAR の結果と比較して,次のようなことが明ら かになっている.

- (1).AAMES と比べ, BISAR の精度は表面近くで 優れているが,少し内部の点において,両者 はほぼ等しい.
- (2).層間のすべり度が大きくなると,表面たわみ は増加し,境界面のせん断応力もゼロに近づ くが,この傾向は AAMES で顕著である.

現在, AAMES を用いて, 最大 30 個の荷重が作 用し,100 個の着目点で応答解析を行うことができ るようになっている.しかし,計算効率と解析精度 を改善に対しては検討する余地があり,さらなる 改善に努める. 謝辞 この研究をまとめるにあたり、運輸省港湾技術研究所滑走路研究室の高橋修氏、日本鋪道(株) 技術研究所所長の井上武美氏に資料の提供および、 アドバイス等でお世話になった。ここに謝意を表し ます.

#### 参考文献

- 1) 宮本 博:3次元弾性論, 裳華房, 1977.
- 2) 土木学会: 舗装工学, 丸善, 1995.
- 3)Van Cauwelaert, F. J., Alexander, D. R., White D. T. and Barker W. R. : *Multilayer Elastic Program for Backcalculating Layer Moduli in Pavement Evaluation, "Nondestructive Testing of Pavements and Backcalculation of Moduli"*, ASTM STP 1026, Bush III, A. J. and Baladi, Eds., pp. 171-188, 1989
- 4)De Jong, D.L., Peutz, M.G.F., and Korswage n, A.R.: *Computer Program BISAR*, Layered systems under normal and tangential surfa celoads,Koninklijke/Shell-Laboratorium, Amst erdam, 1979.
- 5)財団法人航空振興財団:空港アスファルト舗装構 造設計要覧,1990.

## AXI-SYMMETRIC ANALYSIS OF MULTI-LAYERED ELASTIC SYSTEM

# IN CONSIDERATION OF LAYER INTERFACE SLIPS

# Kunihito Matsui, Qinxi Dong, Yoshiaki Ozawa, and Akinori Yamamine

Development of AAMES (Axi-symmetric Analysis of Multi-layered Elastic System) is presented, which can evaluate displacements, stresses and strains in pavement structures caused by surface loading from a closed form solution based on Hankel transformation along with Michell displacement function. A shear spring is utilized to model an interface slip between two adjacent layers. AAMES can handle up to ten layers with varying interface conditions and a maximum of 30 loads. Semi-infinite integration involved in the inverse Hankel transformation, which is found a major cause of error near surface, is carefully examined to improve accuracy of results. The accuracy is confirmed through identical response data using BISAR.