

一般化逆行列を用いた舗装構造の逆解析, 誤差に対する感度と最適センサー位置への適用

岡田貢一¹・亀山修一²・松井邦人³

¹正会員 工修 株式会社パスコ 道路技術センター(〒227 横浜市青葉区榎が丘1番地6第2森野ビル)

²学生会員 工修 長岡技術科学大学博士課程 材料工学専攻(〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)

³正会員 Ph.D. 東京電機大学 理工学部建設工学科(〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

舗装の構造評価を行う目的で、FWD 試験で測定した表面たわみデータから層弾性係数を推定している。本研究で用いている一般化逆行列法はガウス・ニュートン法と同様であることを示し、一般化逆行列を用いた測定誤差やモデルパラメータ誤差に対する層弾性係数の感度解析式を誘導している。さらに、これらの感度を用い、全てのセンサー位置の組み合わせから測定誤差やモデルパラメータ誤差の影響を最小とするような測定位置を求めて、その結果について考察している。

Key Words: *generalized inverse matrix, backcalculated moduli, pavement, sensitivity analysis, optimal sensor locations*

1. はじめに

FWD 試験で計測された表面たわみから舗装構造の層弾性係数を推定することがしばしば行われている。このとき、逆解析手法の一つとしてガウス・ニュートン法が用いられている(例えば¹⁾。測定値に含まれる誤差や、舗装を線形弾性論でモデル化したとき、既知として与えるパラメータの値に含まれる誤差の層弾性係数の推定値に及ぼす影響度を調べることは、推定値のロバスト性を判断する上で重要である。この影響度は逆解析弾性係数の誤差に対する感度係数で表現できる。文献²⁾ではこの感度係数を最適設計問題における最適解の感度の考え方で誘導している。

一般化逆行列を用いる解析方法が、理論上ガウス・ニュートン法と全く同じ結果が得られる事を示すため、本論文では、ガウス・ニュートン法に基づきすでに誘導した方法と対比する形で、一般化逆行列を用いた逆解析法とこの感度解析式を誘導している。マトリックス演算をシステムティックに展開して関係式を誘導できるのが特徴であるガウス・ニュートン法では、正規方程式を解き繰り返し推定値を更新するが、正規マトリックスの条件数が大きくなると、爆発的に誤差の影響が拡大する。一方、一般化逆行列の条件数は

正規マトリックスの条件数の平方根となり、理論的には繰返し計算における誤差伝播がそれだけ小さくなることが期待できる。

ガウス・ニュートン法のような逆解析法ではアルゴリズムに不安定性が内在しているのが問題点であるが、そのような欠点のない遺伝的アルゴリズム、GA を用いた逆解析が提案されている³⁾。さらに、GA を用いて最適センサー配置の検討も行われている⁴⁻⁶⁾。本論文では、先に述べた一般化逆行列から得られる誤差に対する感度を用い、このGAから得られた最適センサー配置の結果を検証している。検討方法として、ここでは指定したセンサー数に対し可能なすべてのセンサー配置の組合せを考え、その中から最適な上位10セットのセンサー配置の組合せを求めている。

2. 一般化逆行列の適用

(1) 逆解析

層弾性係数を推定するようなパラメータを同定する問題の基本的な考え方は、測定値と解析値が一致するようなパラメータの値をシステムティックに求めることである。各層の弾性係数を $E = \{E_j\}$, ($j = 1, \dots, m$) , 解析たわみを

$z(E) = \{z_i(E)\}$, それと対応する測定たわみを $u = \{u_i\}, (i = 1, \dots, n)$ とする. ここに, m, n はそれぞれ層数, 測点数である. 測定値と解析値の間には次のような関係がある.

$$u = z(E) + \varepsilon_u \quad (1)$$

ここに, $\varepsilon_u = \{\varepsilon_{u_i}\}$ は測定誤差ベクトルである. ガウス・ニュートン法では上式の誤差の 2 乗和が最小になるように E を推定しているが, このとき

$$z(E + dE) = z(E) + AdE \quad (2)$$

ここに, $A = [\partial z / \partial E]$ は $m \times n$ のマトリックスである. 式(2)の左辺が u と一致するように E を定めたい. すなわち, 次式を解くことになる.

$$AdE = u - z \quad (3)$$

この式は, $m \times n$ の連立方程式である. A を特異値分解すると

$$A = UDV^T \quad (4)$$

右肩の T は転置行列を意味している. 式(3)の解は式(4)の関係をを用いて

$$dE = VD^{-1}U^T(u - z) \quad (5)$$

と書くことができる. 実際には, E の初期値を仮定し, 式(5)を用いて収束するまでその値を更新する.

(2) 誤差に対する感度

式(5)を用いて繰り返し計算し収束したとき, 式(5)は測定誤差が逆解析弾性係数に及ぼす影響を示している. すなわち,

$$\Gamma = VD^{-1}U^T \quad (6)$$

が測定誤差に対する逆解析弾性係数の感度となる.

舗装をしばしば弾性多層構造でモデル化する. 逆解析では各層の厚さやポアソン比を与えて層弾性係数を推定するが, そのような既知のパラメータに誤差があるとき逆解析結果に影響する. この影響度がモデルパラメータ誤差に対する弾性係数の感度である. この感度係数マトリックスを $\Lambda = [\partial E_j / \partial y_k]$ で表すものとする. y_k は層厚やポアソン比などのパラメータである. Λ は次式より計算できる.

$$\Lambda = VD^{-1}U^TB \quad (7)$$

表-1 誤差に対する感度の比較

感度	ガウス・ニュートン法	一般化逆行列
測定誤差	$(A^T A)^{-1} A$	A^{-1}
モデル誤差	$(A^T A)^{-1} AB$	$A^{-1} B$

$$A = UDV^T \quad A^{-1} = VD^{-1}U^T \quad B = [\partial z_i / \partial y_k]$$

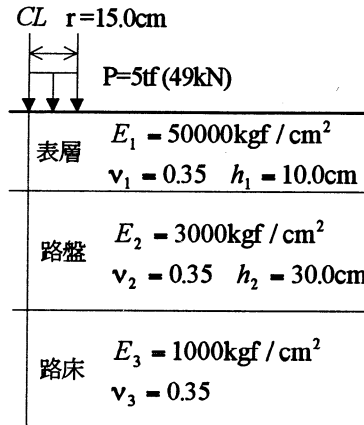


図-1 3層構造モデル

ここに, $B = [\partial z_i / \partial y_k]$ である.

一般化逆行列を利用することにより, 最適解の感度の考え方をを用いることなく, 感度係数を誘導できる. 式(4)の特異値分解のコードが各種の数値解析の文献(例えば 7)に紹介されていることを考えると, この方法は単にマトリックス演算を行うことにすぎず, 便利な方法である. 表-1 に最適解の感度の考え方により求めた方法と併記して整理する.

3. 最適センサー配置

一般化逆行列から誘導した測定誤差に対する感度式(6)とモデルパラメータ誤差に対する感度式(7)を用い, 最適センサー配置を求めている. ここでは使用できるセンサー数と与えられたとして, 可能なすべてのセンサー配置を考え上位 10 セットのセンサー配置を求めている.

例題として, 文献 4) で使用されている図-1 のような 3 層モデルをここでも用いる. 荷重は舗装表面で半径 15cm の円形等分布に作用し, その合力は 5tf (49kN) としている. センサー位置の候補は, FWD 試験機を想定して, 荷重載荷点とその点からの距離が 20cm から 200cm の間に 5cm 刻みで設定しており, 全部で 38 点となる.

(1) 測定誤差に対する最適配置

測定誤差が逆解析弾性係数に及ぼす影響は式(6)を用いて,

$$G = \Gamma^T \sigma^T \Gamma \quad (8)$$

と書くことができる。 G は、測定誤差による逆解析弾性係数の分散・共分散行列である。右辺の σ^2 は、測定たわみの誤差が互いに独立であるとする、それぞれの測点にわたるたわみの分散で与えられる対角マトリクスとなる。測定誤差逆解析結果に与える影響は、逆解析弾性係数の分散・共分散行列のトレースで評価することができる。

$$T_0 = \sum G_{jj} \quad (9)$$

表-2 センサー組み合わせの総数

センサー数	総数
5	501,942
6	2,760,682
7	12,620,256
8	48,903,492
9	163,011,640
10	472,733,756

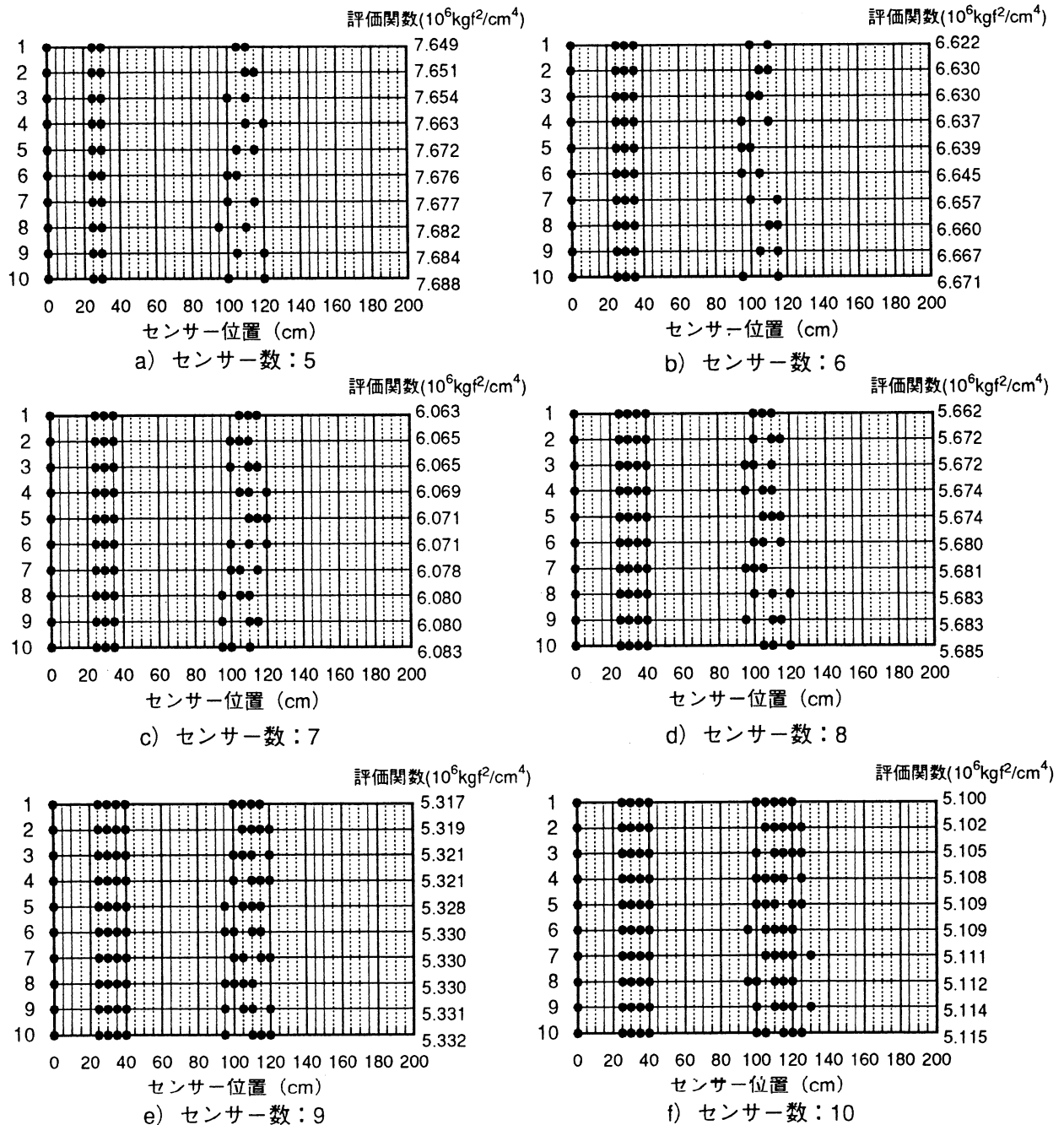


図-2 測定誤差に対する最適センサー配置
(評価関数式(9))

従って、式(9)の値を最小とするセンサー位置の組合せが最適センサー配置となる。この式は各層の弾性係数の分散の和であることを考えると、弾性係数が大きければ分散も大きくなる可能性が大きいことが予測される。そこで、もう一つの評価関数として弾性係数の変動の2乗和、

$$T_1 = \sum G_j / E_j^2 \quad (10)$$

を最適センサー配置の基準としている。

全てのセンサーでたわみ誤差の母集団は平均値0、標準偏差が $2\mu\text{m}$ であるとしよう。使用するセンサー数を5点から10点までとし、それぞれのセンサー数について全ての可能な組合せに対し式(9)と(10)の値を計算した。ちなみに、表-2 は選択したセンサー数とその組合せの総数を示している。すべての組合せの中から最適センサー位置のベスト10 を求めている。結果の一部を図-2(評価関数式(9))と図-3(評価関数式(10))に示す。両図ともベスト10 の評価関数の値にはほとんど差がないことは、これらのセンサー配置のど

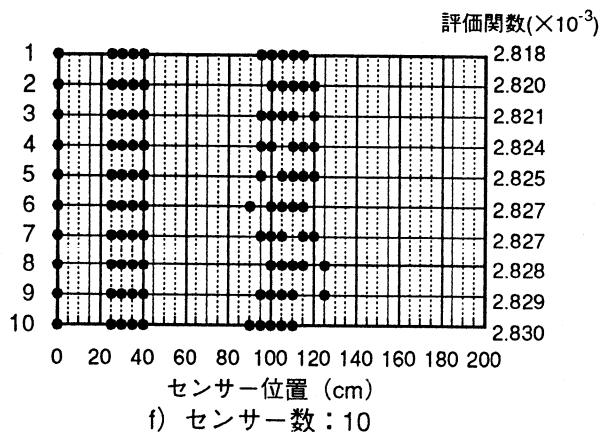
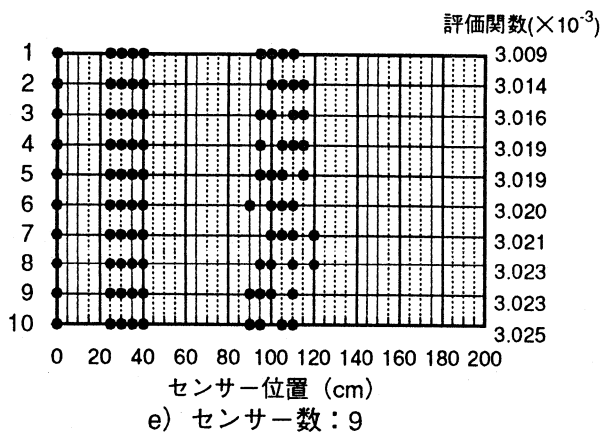
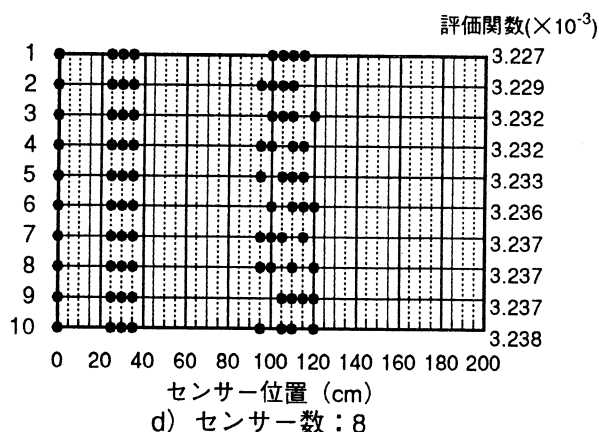
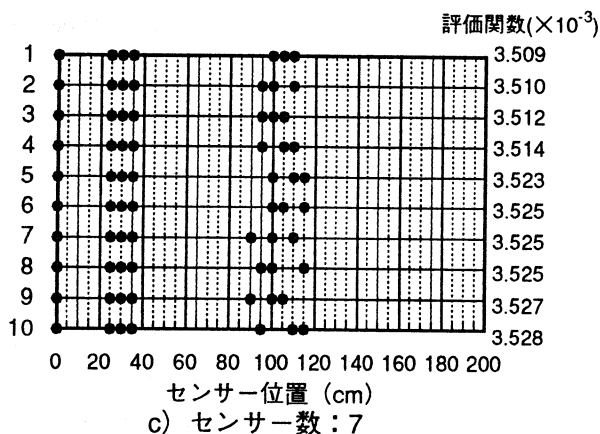
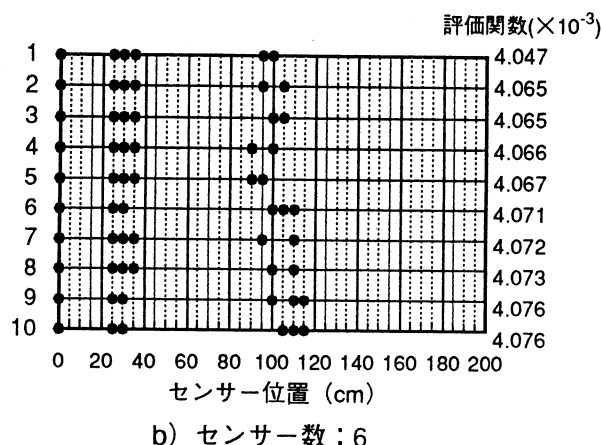
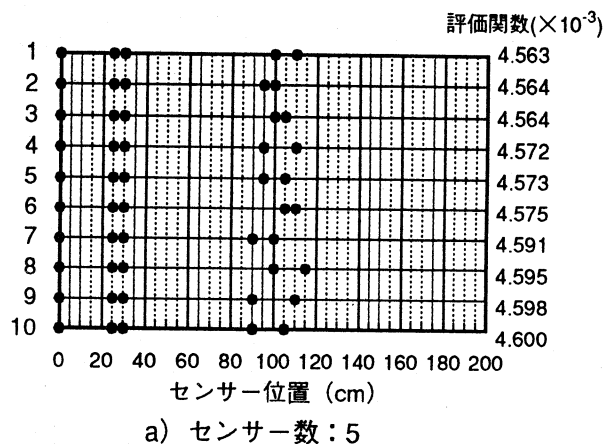


図-3 測定誤差に対する最適センサー配置
(評価関数式(10))

れを選択しても結果にほとんど影響しないことが予測できる。

図-2.3より、検討したセンサー数の範囲では、センサー数の数に関係なく、その最適配置は3グループに分かれている。それぞれのグループに属するセンサー数は、センサー数6と8の時を除き同じである。この結果は文献4)の傾向とも一致している。また、文献4)では、式(9)を評価式としているが、GAで得られた最適センサー配置と図-2の最も良いセンサー配置と、ほとんど全てのセンサー数で一致してい

ることから、GAの信頼性が改めて確認できた。

(2) モデルパラメータ誤差に対する最適配置

式(7)はモデルパラメータの誤差が逆解析弾性係数に与える影響を示している。この感度を用いると、層厚のばらつきが逆解析弾性係数に及ぼす影響を

$$H = \Lambda^T \sigma \Lambda \quad (11)$$

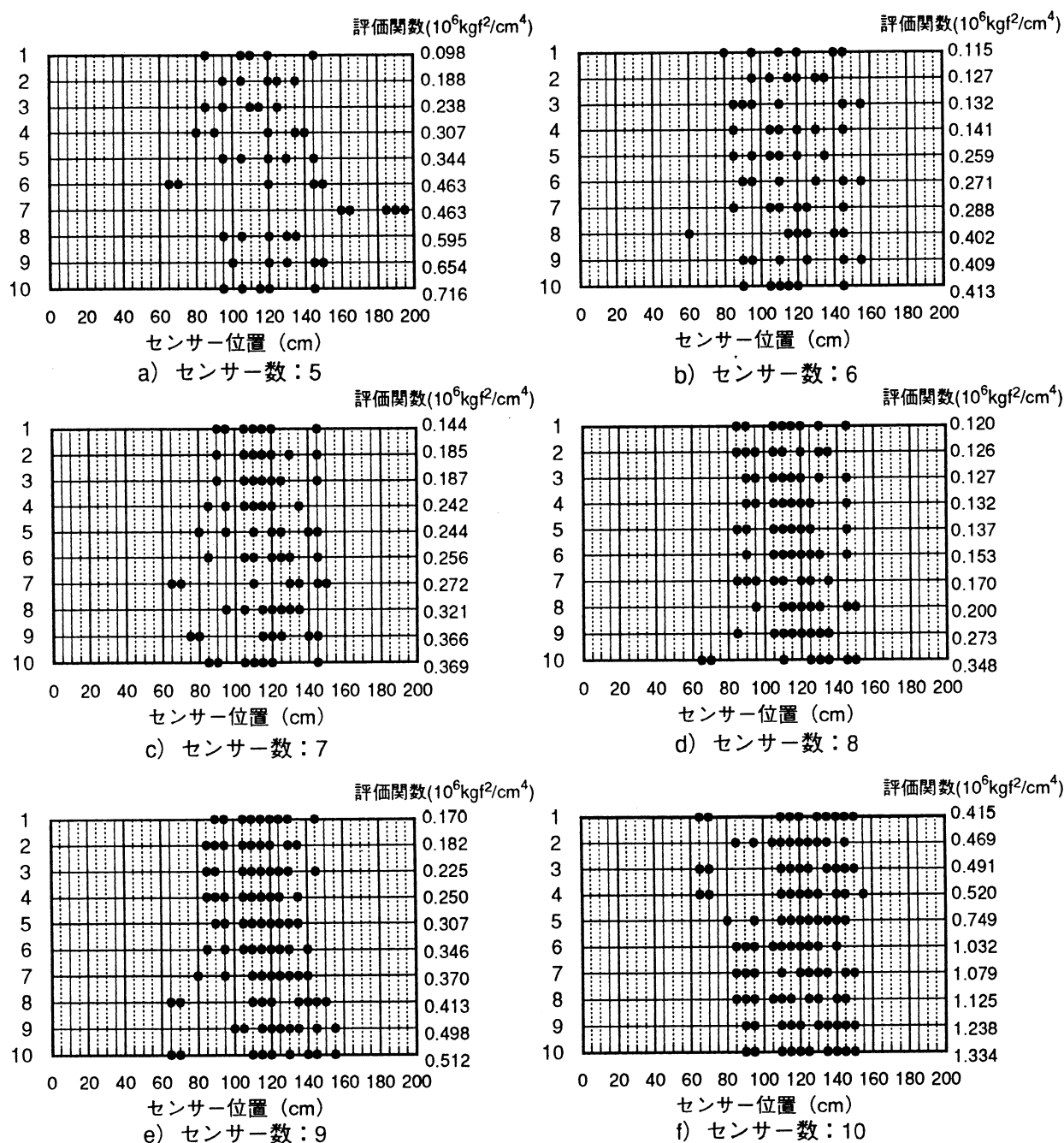


図-4 層厚誤差に対する最適センサー配置

と書くことができる。Hは、モデルパラメータ誤差に対する逆解析弾性係数の分散・共分散行列である。右辺の σ^2 は、モデルパラメータ誤差のばらつきを表す行列である。モデルパラメータ誤差の間に相関がなければ測定値の誤差と同様に対角行列となる。

ここでは、図-1の3層構造を対象として、層厚に5%のばらつきがあるとしよう。式(11)を用いて、センサー数が5点から10点までについて測定誤差の場合と同様にセンサーの最適配置を求めた。層厚誤差に対する最適なセンサー配置のベスト10を図-4に示す。ベスト10の評価関数の値を見ると、測定誤差の場合と比べ、ベスト10の1番目と10番目の値の差が大きい。また、ベスト10のセンサー位置は、ほとんど60cmから160cmの間にあるが、それ以外明確な傾向が見られない。このことから、式(11)はセンサーの位置にかかり敏感であることがうかがえる。さらに、図-4から層厚誤差の影響を減少するには、載荷点近傍のセンサーを配置しない方が良く読みとれるが、このことについては3.(3)で考察する。

(3) 最適センサー配置に関する考察

3.(1),(2)では、解析的に最適センサー配置を求めている。しかし、元々非線形である問題を線形近似して評価式を誘導しており、非線形性が顕著であると上記の方法で最適センサー配置を求めることはできない。まず、測定誤差に対する最適センサー位置について、モンテカルロシミュレーションを用いて結果の妥当性を確認する。ここでは、センサー数7点の最適配置について計算した例を示す。測定たわみの誤差の標準偏差を $2\mu\text{m}$ として7個の測点で正規乱数を発生させ、100セットのたわみデータを作成した。そのデータを用いて逆解析を行い、結果を表-3に示す。 E_1 の標準偏差に少し差が見られるが両者はほぼ同じであると見なすことができ、この程度の測定誤差なら、1次近似に基づく解析方法でも十分精度良く測定誤差の影響を評価できる。

層厚誤差に対して求めた最適センサー位置についても同様にモンテカルロシミュレーションを適用し、3(2)で求めた結果と比較する。測定誤差の場合と同様に、変動係数が5%となるような正規乱数を100セット発生させた。100個の層厚が異なる3層構造を作成したことになる。100個の3層構造に対して、層厚誤差に対する最適センサー配置(センサー数7個)において、たわみを計算し、図-1の層厚で逆解析を行った。また比較のため、同じ100個の舗装構造で7個のセンサーを30cmピッチで配置したときと図-2の測定誤差に対する最適センサー配置(センサー数7個)についても同様に逆解析を行った。その結果を表-4に示す。解析的に推定した層弾性係数の標準偏差とモンテカルロシミュレーションから計算した標準偏差を比較すると、層厚誤差に対する最適センサー位置の場合、両者の E_1 の標準偏差

に大きな違いがある。しかし、他の2ケースについては、両者の標準偏差の差は小さい。

表-4に示した3ケースについてモンテカルロシミュレーションから求めた E_1 の標準偏差を比較すると、モデル誤差に対する最適センサー配置から得られた E_1 の標準偏差は、他の2ケースに比べ小さいであろうと予測したにもかかわらず、この3者の間で最も大きくなっている。また、解析的に推定した E_1 の標準偏差に比べ遥かに大きい。このことは、逆解析の過程で計算が不安定になっていることを示唆している。そこで、この3ケースのセンサー配置について、式(3)のAの条件数を調べた。結果を表-5に示す。層厚誤差の最適センサー位置に対して、条件数が他の場合と比べ遥かに大きくなっていることから、誤差伝播が一番大きいことが予測できる。表-4作成のために行った100セットの逆解析でも、17セットで40回繰り返し計算を行っても収束していないのに対し、他の2ケースでは100セット全てのデータが、5回以内の繰り返し計算で収束している。収束過程の一例を図-5に示す。

表-3 測定誤差が含まれる場合の最適センサー位置

上段:モンテカルロシミュレーション
(下段:本論文の手法)

		E_1 (kgf/cm ²)	E_2 (kgf/cm ²)	E_3 (kgf/cm ²)
評価関数式(9) (センサー位置: 0.0,25.0,30.0, 35.0,105.0, 110.0,115.0cm)	最大値	55146.3 (-)	3408.5 (-)	1019.1 (-)
	最小値	41427.8 (-)	2794.2 (-)	982.0 (-)
	平均値	50024.1 (50000.0)	3000.4 (3000.0)	1000.6 (1000.0)
	標準偏差	2634.9 (2460.3)	101.1 (96.9)	7.6 (8.0)
	変動係数 (%)	5.3 (4.9)	3.4 (3.2)	0.8 (0.8)
評価関数式(10) (センサー位置: 0.0,25.0,30.0, 35.0,100.0, 105.0,110.0cm)	最大値	55123.6 (-)	3407.3 (-)	1018.3 (-)
	最小値	41433.8 (-)	2796.4 (-)	982.2 (-)
	平均値	50018.0 (50000.0)	3000.6 (3000.0)	1000.6 (1000.0)
	標準偏差	2639.3 (2460.8)	100.5 (96.1)	7.4 (7.8)
	変動係数 (%)	5.3 (4.9)	3.3 (3.2)	0.7 (0.8)

表-4 モデル誤差が含まれる場合の最適センサー位置
(変動係数:5%)

上段:モンテカルロ・シミュレーション
(下段:本論文の手法)

		E_1 (kgf/cm ²)	E_2 (kgf/cm ²)	E_3 (kgf/cm ²)
最適位置 (層厚誤差)	最大値	85690.2	4137.1	1015.8
		(-)	(-)	(-)
	最小値	11918.0	2213.7	990.2
		(-)	(-)	(-)
	平均値	53098.4	3061.9	1000.7
(センサー位置: 90.0,95.0,105.0, 110.0,115.0, 120.0,145.0cm)		(50000.0)	(3000.0)	(1000.0)
	標準偏差	10472.8	295.2	3.9
		(181.6)	(333.5)	(4.1)
	変動係数 (%)	19.7	9.6	0.4
30cmピッチ	最大値	68556.7	3352.3	1025.8
		(-)	(-)	(-)
	最小値	36703.4	2738.7	984.9
		(-)	(-)	(-)
	平均値	50939.3	3028.9	1000.6
(センサー位置: 0.0,30.0,60.0, 90.0,120.0, 150.0,180.0cm)		(50000.0)	(3000.0)	(1000.0)
	標準偏差	5915.7	130.5	7.7
		(5848.8)	(163.8)	(3.6)
	変動係数 (%)	11.6	4.3	0.8
最適位置 (測定誤差)	最大値	64051.3	3548.7	1035.4
		(-)	(-)	(-)
	最小値	38389.8	2691.0	959.4
		(-)	(-)	(-)
	平均値	50702.3	3042.7	999.6
(センサー位置: 0.0,25.0,30.0, 35.0,105.0, 110.0,115.0cm)		(50000.0)	(3000.0)	(1000.0)
	標準偏差	4775.9	168.9	14.8
		(5765.8)	(159.7)	(3.1)
	変動係数 (%)	9.4	5.6	1.5
		(11.5)	(5.3)	(0.3)

表-5 最適センサー位置と条件数

最適センサー位置	条件数
層厚誤差	3.33179×10^6
30cm ピッチ	8.90269×10^2
測定誤差	3.80424×10^3

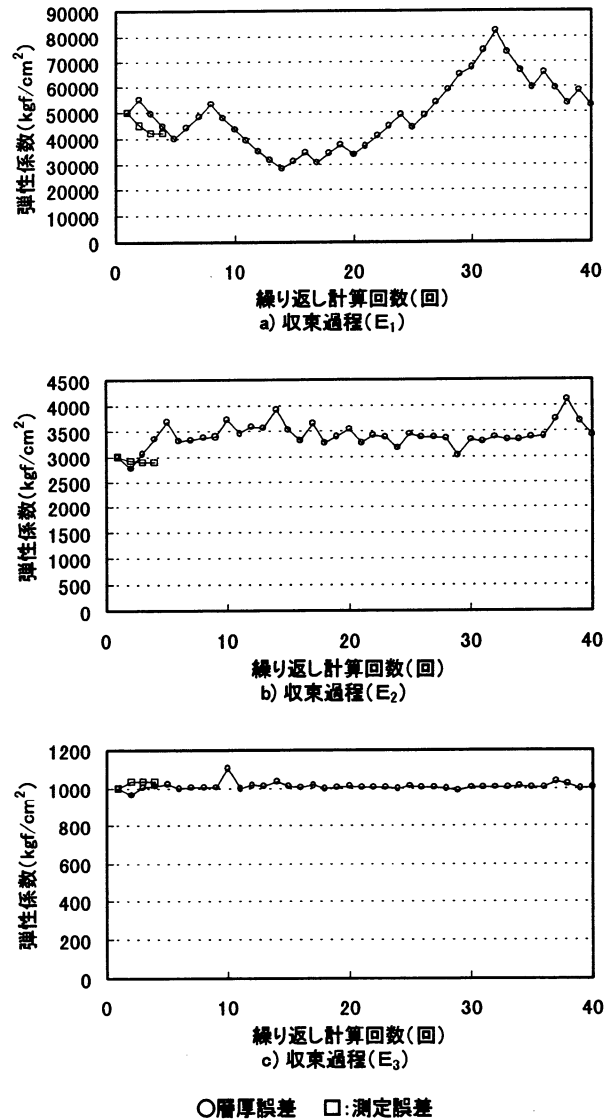


図-5 各最適センサー位置での逆解析の収束過程の一例

このように、センサー配置は、測定誤差やモデルパラメータ誤差が逆解析結果に与える影響と関係するだけでなく、逆解析アルゴリズムの安定性にも影響することが明らかになった。したがって、測定誤差やモデルパラメータ誤差の影響を最小とするだけでなく逆解析の繰り返し計算過程の安定性が確保できるようなセンサー配置が、最適センサー配置と言えるであろう。この意味で、モデルパラメータ誤差がある場合でも、測定誤差に対する最適センサー配置や30cmピッチのセンサー配置が、層厚誤差に対する最適測定配置より優れている。

4. 結論

一般化逆行列を用いる解析方法が理論的には、ガウス・ニュートン法と同様であることを示した。更に、一般化逆行列による測定誤差、モデルパラメータ誤差の計算式を誘導

し、ガウス・ニュートン法と対比した。ガウス・ニュートン法と比べ、一般化逆行列を用いる方が式の上からも明らかなように条件数が小さくなる。

一般化逆行列を用いて誤差に対する感度を計算し、それを用いて測定誤差に対する最適センサー配置を求めたが、測定誤差に対する最適センサー配置は、文献4)のGAを用いて得た最適センサー配置とほとんどのセンサー数で一致している。本論文で用いた2種類の評価関数で判断しても、最適センサー配置に大きな影響はない。

モデルパラメータ誤差に対する最適センサー位置は、層厚誤差に対して逆解析のアルゴリズムが不安定になり、決して最適なセンサー位置とは言えない。

センサー配置は、測定誤差やモデル誤差の逆解析結果への影響だけでなく、逆解析アルゴリズムの安定性にも大きく影響する。したがって、数値計算上の安定性も考慮してセンサー配置を考えることが重要である。

参考文献

- 1) 松井邦人, 井上武美, 三瓶辰之: 舗装各層の弾性係数を表面たわみから推定する一手法, 土木学会論文報告集, 第420号/V-13, pp.107-114, 1990年8月.
- 2) 松井邦人, 井上武美, 三瓶辰之: 弾性多層構造の逆解析におけるモデル誤差・測定誤差に対する感度, 土木学会論文報告集, No.454/V-20, pp.11-17, 1992年9月.
- 3) 亀山修一, 姫野賢治, 丸山暉彦, 笠原 篤: 遺伝的アルゴリズムを用いた舗装体の弾性係数の逆解析, 土木学会論文集, (to appear)
- 4) 亀山修一, 松井邦人, 笠原 篤, 姫野賢治, 丸山暉彦: 測定誤差から見た FWD センサーの最適配置に関する検討, 土木学会論文集投稿中
- 5) 亀山修一, 松井邦人, 笠原 篤, 姫野賢治, 丸山暉彦: 遺伝的アルゴリズムによる FWD たわみ測定位置の最適化, 1996年度土木情報システム論文集
- 6) 亀山修一, 松井邦人, 笠原 篤, 姫野賢治, 丸山暉彦: FWD センサー位置が逆解析弾性係数に及ぼす影響, 舗装工学論文集, 1996
- 7) 大野 豊, 磯田和男: 最新数値計算ハンドブック, オーム社, pp.752-769, 1990年9月.
- 8) William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery: *Numerical Recipes in FORTRAN The Art of Scientific Computing Second Edition*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, pp.51-63.1992

(1996.10.14 受付)

GENERALIZED INVERSE MATRIX BASED BACKCALCULATION OF PAVEMENT STRUCTURE AND THE OPTIMAL SENSOR LOCATIONS

Koichi OKADA, Shuichi KAMEYAMA and Kunihiro MATSUI

Pavement layer moduli are estimated from surface deflections measured by FWD in order to diagonalize a pavement structure. It is shown that strong similarity exists between a generalized inverse matrix method employed here and the Gauss-Newton method. Sensitivity equation with respect to error is derived. By using the sensitivity with respect to error, optimal sensor locations which minimize the effect of measurement and model parameter errors are obtained by exhaustive search.