

# 幾何学的非線形を考慮した EFIT による弾性波解析の基礎検討

愛媛大学大学院 学生員 ○朝日快佳

正会員 丸山泰蔵  
正会員 中畑和之

近年盛んに研究が進められている非線形超音波法は、閉じたき裂に大振幅の入射波を与え、き裂面の接触・非接触に起因する超音波の非線形性(界面非線形性)を利用してき裂を評価する手法である。一方、超音波に非線形性が発現する要因として、幾何学的要因がある。これは、大振幅時に変形が大きくなることであり、高次の変位-ひずみ関係で表すことができる。このような大振幅は、空気を媒介として超音波を伝搬させる空気超音波法 [1] で見られる現象である。そこで、本研究では、幾何学的音響非線形問題を扱う数値解析法を開発することを目的とする。線形問題を対象として、動弾性有限積分法 [2](Elastodynamic finite integraion technique: EFIT) が波動伝搬解析法として用いられている。ここでは、EFIT に有限ひずみテンソル [3] を導入することで、幾何学的非線形性を扱うことができるシミュレーションを提案し、1次元弾性波動場で検討を試みた。

## 1. 幾何学非線形モデルに対する EFIT

幾何学的非線形は、有限ひずみテンソル  $e$  を適合条件式に導入することで表現できる。1次元問題の場合、適合条件式は次式となる。

$$e_{11} = \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] \quad (1)$$

ここで、 $u_1$  は  $x_1$  方向の変位である。構成則は次式で表される。

$$\sigma_{11} = \rho c_L^2 e_{11} \quad (2)$$

ここで、 $\sigma_{11}$  は直応力、 $\rho$  は材料の密度、 $c_L$  は縦波音速である。上式を時間  $t$  で偏微分すると次式を得る。

$$\dot{\sigma}_{11} = \rho c_L^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left[ 1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] \quad (3)$$

ここで、 $v_1$  は  $x_1$  方向の粒子速度、 $(\dot{\quad})$  は時間  $t$  に関する偏微分を表す。式 (3) を微小領域  $A$ (その境界  $l$ ) で積分する。

$$\begin{aligned} & \int \dot{\sigma}_{11} dA \\ &= \int \rho c_L^2 \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + v_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right] dA \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、上式の被積分項の第3項は変位の空間に関する2次の微分であり、0であるとする。変位の空間微

分を  $w_1 = (\partial u_1 / \partial x_1)$  とすると、式 (4) は次式となる。

$$\int \dot{\sigma}_{11} dA = \int \rho c_L^2 v_1 n_1 dl - \int \rho c_L^2 v_1 w_1 n_1 dl \quad (5)$$

ここで、 $n_1$  は領域  $A$  の外向き法線ベクトル (1次元の場合、 $x_1$  軸の正または負方向のベクトル) である。従って、構成則は以下のように離散化できる。

$$\sigma_{i11} = \frac{\rho c_L^2}{\Delta x} \left( \left[ v_1^{(R)} - v_1^{(L)} \right] - \left[ v_1^{(R)} w_1^{(R)} - v_1^{(L)} w_1^{(L)} \right] \right) \quad (6)$$

ここで  $\Delta x$  は積分領域  $A$  の  $x_1$  方向の長さである。積分セルの右面に配置される物理量を  $(R)$ 、左面の物理量を  $(L)$  で表す。また、運動方程式は次式で表される。

$$\rho \dot{v}_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \quad (7)$$

構成則と同様に離散化を行うと次式を得る。

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{\rho_1 \Delta x} \left[ \sigma_{11}^{(R)} - \sigma_{11}^{(L)} \right] \quad (8)$$

EFIT の時間域の離散式は

$$\{v_i\}^{z+1} = \{v_i\}^z + \Delta t \{\dot{v}_i\}^{z+\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$\{\sigma_{ij}\}^{z+\frac{1}{2}} = \{\sigma_{ij}\}^{z-\frac{1}{2}} + \Delta t \{\dot{\sigma}_{ij}\}^z \quad (10)$$

と表される。上式に式 (6) と (8) を代入すると

$$(v_1)_I^{z+1} = (v_1)_I^z + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \left[ (\sigma_{11})_{I+\frac{1}{2}}^{z+\frac{1}{2}} - (\sigma_{11})_{I-\frac{1}{2}}^{z+\frac{1}{2}} \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{11})_{I-\frac{1}{2}}^{z+\frac{1}{2}} &= (\sigma_{11})_{I-\frac{1}{2}}^{z-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho c_L^2 \left[ (v_1)_I^z - (v_1)_{I-1}^z \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho c_L^2 \left[ (v_1)_I^z (w_1)_I^z - (v_1)_{I-1}^z (w_1)_{I-1}^z \right] \end{aligned} \quad (12)$$

を得る。ここで、 $\Delta t$  は時間ステップ幅であり、上付き文字  $z$  は時間ステップ番号を示している。 $w_1$  について、

$$(w_1)_I \approx \frac{(u_1)_{I+1} - (u_1)_{I-1}}{2\Delta x} \quad (13)$$

$$(w_1)_{I-1} \approx \frac{(u_1)_I - (u_1)_{I-2}}{2\Delta x} \quad (14)$$

とする。線形弾性モデルに対する EFIT では応力と速度を交互に計算して解を更新していくが、有限ひずみテンソルを導入した EFIT では変位も更新する必要がある。

ある。本研究では、図1に示すように変位のグリッド配置を速度と同じ位置にし、EFITに組み込むことにした。その際、次式のように中心差分を用いて速度を積分することで変位の計算を行うことにした。

$$(u_1)_I^{z+1} = (u_1)_I^z + \frac{1}{2} \Delta t [(v_1)_I^{z+1} - (v_1)_I^z] \quad (15)$$

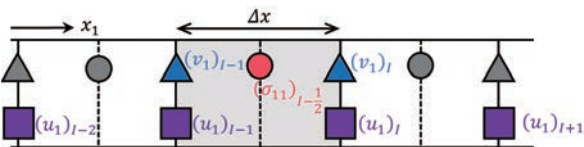


図-1 1次元EFITのグリッド配置図

## 2. 波動伝搬シミュレーション

材質を鋼として、 $c_L = 5800\text{m/s}$ 、 $\rho = 7800\text{kg/m}^3$ で計算を行った。モデルの左端に応力振幅 $\sigma_0$ を与えることでsin波形の入射波を発生させた。セル長および時間ステップ幅は $\Delta x = 0.01\text{mm}$ 、 $\Delta t = 0.0017\mu\text{s}$ とした。入射波の応力振幅および送信周波数を変化させてシミュレーションを行った結果を図2~4に示す。また、入射位置から40mmの点における変位の時刻歴応答波形をフーリエ変換した結果を図5と6に示す。

入射応力振幅を大きくすると波形がsin波から崩れていき、ひずむのがわかる。フーリエ振幅で見れば、送信周波数の整数倍の高調波成分が増大する。送信入射周波数を高くした場合も同様に波形のひずみが大きくなり、5MHzの場合では送信周波数の3倍の高調波成分まで確認できる。また、 $6.8\mu\text{s}$ の時の波形に比べ、 $13.6\mu\text{s}$ の波形のひずみが大きくなっていることから、幾何学的非線形は伝搬時間や距離に依存している様子が模擬できた。

## 3. おわりに

本研究では、空気超音波法など大振幅波動の伝搬に見られる幾何学的非線形を模擬するために、1次元EFITの開発と検証を行った。離散化を行う際に、線形問題に対するEFITのグリッド配置に対して、新たに変位グリッドが必要であることがわかった。また、数値シミュレーションを行った結果、高調波成分が出現することを確認できた。今後は、解析解と比較することで、精度を検証していきたい。

## 参考文献

- 1) 伊藤洋一：強力空中超音波の発生方法とその応用技術，電子情報通信学会 基礎・境界ソサエティ Fundamentals Review, Vol. 9, No. 3, pp.205-213, 2016.
- 2) 中畑和之，廣瀬壯一：非均質異方性材料中の弾性波伝搬解析のためのイメージベースEFITの開発と非破壊検査への応用，応用力学論文集, Vol. 12, pp.163-170, 2009.
- 3) Cattani, C., Rushchitsky, J. J.: Nonlinear cylindrical waves in Signorini's hyperelastic material, *International Applied Mechanics*, Vol. 42, No. 7, pp.765-774, 2006.

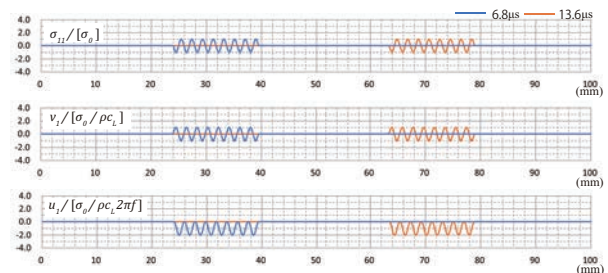


図-2 入射波の応力振幅  $0.1\text{N/mm}^2$ ，送信入射周波数  $3\text{MHz}$  の場合の波動伝搬の様子（青は  $6.8\mu\text{s}$ ，赤は  $13.6\mu\text{s}$  の時点の波形）

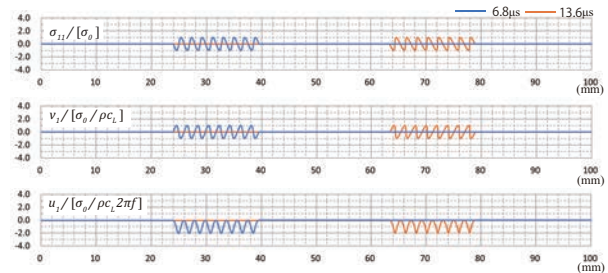


図-3 入射波の応力振幅  $1.0\text{N/mm}^2$ ，送信周波数  $3\text{MHz}$  の場合の波動伝搬の様子（青は  $6.8\mu\text{s}$ ，赤は  $13.6\mu\text{s}$  の時点の波形）

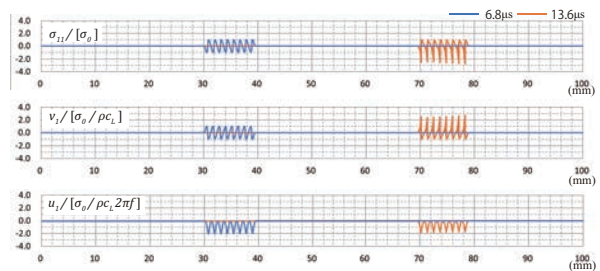


図-4 入射波の応力振幅  $1.0\text{N/mm}^2$ ，送信周波数  $5\text{MHz}$  の場合の波動伝搬の様子（青は  $6.8\mu\text{s}$ ，赤は  $13.6\mu\text{s}$  の時点の波形）

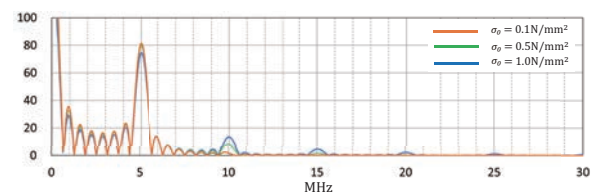


図-5 送信周波数  $5\text{MHz}$  で入射波の応力振幅を変化させた場合のフーリエスペクトル

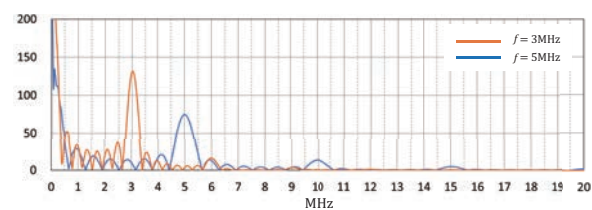


図-6 入射波の応力振幅  $1.0\text{N/mm}^2$  で送信周波数を変化させた場合のフーリエスペクトル