# 半解析的有限要素法を用いたガイド波の伝搬モード解析

愛媛大学大学院　学生員　○唐川和輝
愛媛大学大学院　正　員　　中畑和之

## 1. はじめに

様々な長尺材料が土木構造部材で使われており，そのメンテナンスのために効率的な非破壊検査が求められている．超音波非破壊検査の 1 つとして，ガイド波[1)] が注目されている．ガイド波は，ウェーブガイドに沿って伝搬する超音波のことで，バルク波に比べて減衰が少ないため，長距離伝搬が可能であり広範囲が検査できる．しかし，周波数や板厚に依存して超音波の伝搬速度が変化する分散性や，1 つの周波数において複数の伝搬モードが発生する重畳性のために，きずからのエコーの識別が困難となる場合がある．検査の精度向上のために，事前に伝搬特性を分散曲線を通して把握しておく必要がある．平板や中実丸棒のような単純な断面形状を持つ部材の分散曲線は，解析的に求めることができるが，鉄道レールなどの複雑な形状を有する材料においては数値計算に頼らざるを得ない．

著者らは，任意断面を有する長尺材料のガイド波の分散曲線を半解析的有限要素法[2)](Semi-analytical finite element method : SAFE) を用いて計算している．しかし，高周波領域における SAFE の精度は十分であるとは言えなかった．そこで，本研究では，4 角形 2 次要素を用いた SAFE のコードを開発し，中実丸棒において，その数値解の精度の検討を行う．また，SAFE で求めた固有値の伝搬モードの形状を確認するため，鉄道レールのモード形状の 3 次元可視化を行う．

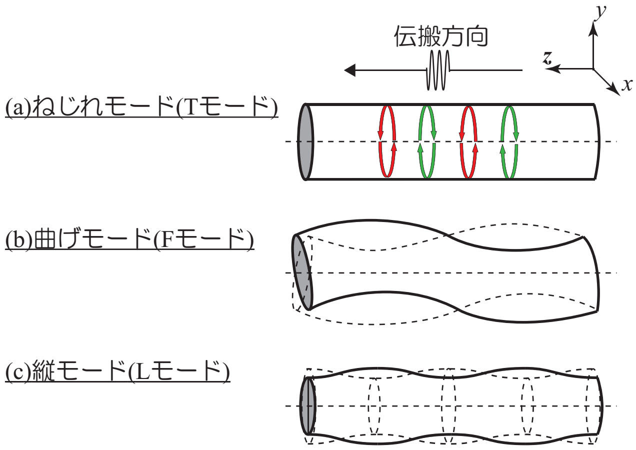
## 2. 中実丸棒におけるガイド波の伝搬モード

中実丸棒中におけるガイド波の伝搬モードは，ねじれモード (T モード)，曲げモード (F モード)，縦モード (L モード) の 3 つに分類される (図-1)．T モードは円周方向に捻じれながら長手方向 ($z$ 方向) に伝搬する．また，L モードは伝搬軸に対して対称に偏向する．また，F モードは伝搬軸に対して非対称に偏向する．中実丸棒における分散曲線は解析的に求めることができる．例えば，L モードの分散曲線は，Pochhammer 方程式[1)] より周波数ステップごとに計算可能である．ガイド波には分散性があるため，位相速度 $c_p$ と群速度 $c_g$ が異なる．ここで，周波数を $f$，角周波数を $\omega$，波数を $k$ とすると，次式の関係がある．

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k} \tag{1}$$

また，位相速度と群速度の関係は以下のようになる．

$$c_g = c_p^2 \left[ c_p - \omega \frac{dc_p}{d\omega} \right]^{-1} \tag{2}$$




**図– 1** 中実丸棒におけるガイド波の伝搬モード

## 3. SAFE の定式化

3 次元問題における SAFE の定式化を述べる．ここでは，3 角形要素，4 角形 1 次要素，4 角形 2 次要素を用いて離散化する．4 角形 2 次要素はセレンディピティー要素を用いる．長尺材料の長手方向 (伝搬方向) を $z$ 軸とし，断面を $x$–$y$ とする．任意点 $(x, y, z)$ における変位，ひずみ，応力を，それぞれ $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\sigma}$ とする．$j$ 番目の要素における弾性波動を支配する方程式は，仮想仕事の原理を用いて次のように書ける．

$$\int_{V_j} (\boldsymbol{\partial u}^*)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{V_j} \rho (\boldsymbol{u}^*)^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{u}} dV = 0 \tag{3}$$

ここで，$^*$ は複素共役，$\rho$ は密度，$\ddot{\{\}}$ は時間 $t$ に関する 2 階微分，$\int_{V_j} \cdot dV$ は $j$ 番目の要素における体積積分である．式 (3) には，表面力 0 の境界条件を適用している．

このとき，$z$ 方向に伝搬する超音波の変位ベクトルは，複素波数 $\xi$ と複素振幅 $\boldsymbol{U}$ を用いて，以下のようにフェーザ表示できる．

$$\boldsymbol{u}(x, y, z) = N(x, y)\boldsymbol{U} \exp(i\xi z - i\omega t) \tag{4}$$

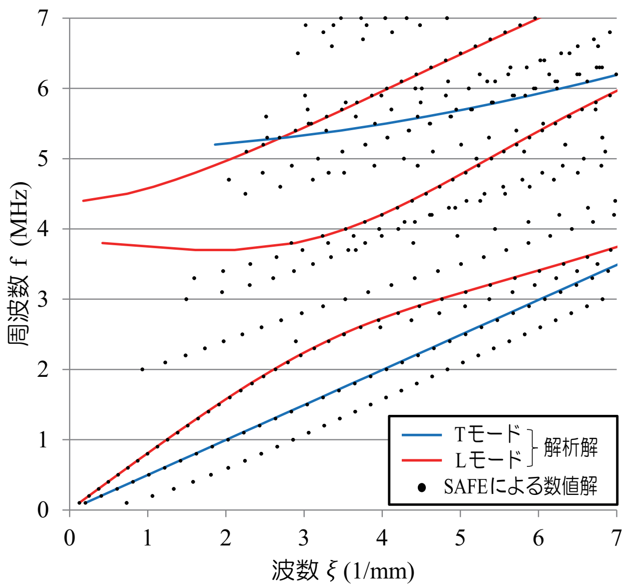
これを式 (3) に代入して，固有値問題に帰着させる．

$$[\boldsymbol{A}(\omega) - \xi \boldsymbol{B}(\omega)]\boldsymbol{Q} = 0 \tag{5}$$

上式の，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{Q}$ の具体的な表現は，論文[2)] を参照されたい．式 (5) の一般化固有値問題を数値的に解くことによって $m$ 番目の固有値 $\xi_m$ を求め，この結果を次式に代入することで，位相速度 $c_p^m$ を得る．

$$c_p^m = \frac{\omega}{\xi_m} \tag{6}$$

4 角形 2 次要素を用いた SAFE によって数値的に得られた直径 1mm のアルミニウム中実丸棒における要素数 32 のときの波数-周波数の分散曲線と，理論式 1)から導出した L モード，T モードの分散曲線を比較したものを図-2 に示す．SAFE はすべてのモードが同時に計算されるので，L モード，T モード以外も出現している．L モード，T モードにおいては，SAFE と解析解は良好に一致していることが確認できる．




**図– 2** 中実丸棒における SAFE から求めた数値解と解析解の分散曲線の比較

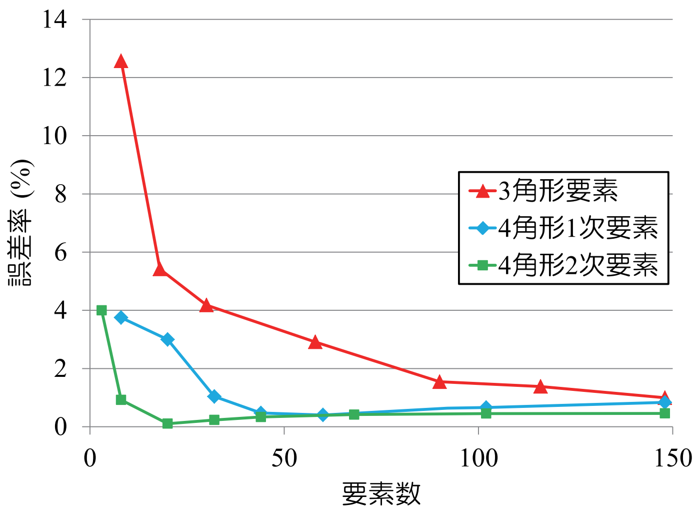
## 4. SAFE による数値計算

中実丸棒において，要素タイプごとに要素数を増やした場合の SAFE の精度について検討を行った．ここでは，5.0MHz のときの SAFE の解と理論式から求めた解析解と比較し誤差率を求めた．精度の指標となる誤差率は

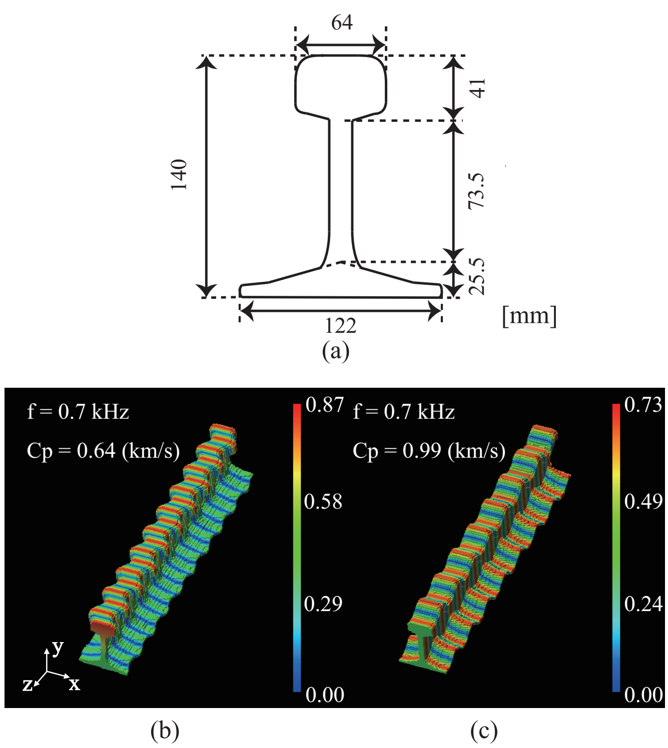
$$\text{誤差率}:\left|\frac{\xi-\xi_c}{\xi_c}\right|\times 100(\%) \tag{7}$$

と定義した．ここで，$\xi$：SAFE による数値解の波数，$\xi_c$：解析解の波数である．このとき，要素タイプごとに周波数 5.0 MHz，波数 10.29(1/mm) 付近の誤差率を比較したものを図-3 に示す．図-3 より誤差率 1.0%のときの要素数を比較すると 3 角形要素のときが要素数 148，4 角形 1 次要素は要素数 32，4 角形 2 次要素は要素数 8 となっている．4 角形 2 次要素を用いると少ない要素数で高精度の解を得られることがわかった．SAFE に 4 角形 2 次要素を用いることで SAFE の精度向上を図ることができた．

図-4 は，SAFE で固有値とともに得られる固有ベクトルを元に，周波数 $f$=0.7 kHz のときの鉄道レールの伝搬モードの可視化を行ったものである．モデルの概形は図-4 (a) の通りであり，材質はアルミニウムである．(b) は位相速度 $c_p$=0.64 km/s，(c) は 0.99 km/s のときの伝搬モードである．この伝搬モードは曲げモードに分類でき，(b) は水平方向に，(c) は鉛直方向に偏向する曲げモードであることがわかる．伝搬モード形状を可視化することで，検査対象となる部位のみを伝搬するモード等が識別でき，検査前に伝搬モードの選択が可能になるものと期待できる．




**図– 3** 要素数を変化させた場合の各要素タイプの誤差率の比較




**図– 4** 鉄道レールの伝搬モード形状

### 参考文献

1) J. L. Rose：*Ultrasonic Waves in Solid Media*, Cambridge University Press, New York, 1999.
2) T. Hayashi, W-J. Song, J. L. Rose：Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example, *Ultrasonics*, Vol.41, pp.175-183, 2003.