# 任意断面を有する長尺材料中を伝搬するガイド波の数値解析

愛媛大学大学院	学生員 〇大谷憂馬			非会員		岡崎	大
	非会員	大月	誠	正	員	中畑利	口之

## 1. はじめに

近年,超音波探傷(UT)の1つの方法として,長尺 材料に対してガイド波<sup>1)</sup>の適用が精力的に試みられ ている.ガイド波は,波長に対して薄い板厚中を伝搬 する超音波のことであり,バルク波に比べて減衰が少 ないため,長距離伝搬が可能である.しかし,周波数 や板厚に依存して超音波の伝搬速度が変化する分散性 や,1つの周波数において複数の伝搬モードが発生す る重畳性のために,きずからのエコーを正確に特定で きないといった問題が生じている.そこで,ガイド波 探傷において,対象材料のガイド波の分散関係を予め 把握しておく必要がある.分散関係は,簡単な断面形 状(平板,中実丸棒,円管等)においては,解析的に 求めることができる.しかし,任意形状を有する材料 においては数値計算に頼らざるを得ない.

著者らはこれまで、任意断面を有する長尺材料の ガイド波の分散曲線を半解析的有限要素法<sup>2)</sup>(Semisnalytical finite element method:SAFE)を用いて算 出する方法について報告してきた.しかし、それは2 次元平面ひずみ状態を仮定したものであったため、本 研究ではSAFEを3次元モデルに拡張を行う.まず、 中実丸棒において分散曲線の解析解とSAFEにより 得た数値解を比較する.次に、異形鉄筋において動弾 性有限積分法<sup>3)</sup>(EFIT)で得られた時刻歴波形から求 めた分散関係とSAFEから求めたものと比較を行い、 SAFEの妥当性について検証を行う.

2. 中実丸棒中を伝搬するガイド波の伝搬モード 中実丸棒中におけるガイド波の伝搬モードは、ねじ れモード (Tモード)、曲げモード (Fモード)、縦モー ド (Lモード)の3つに分類される (図-1). Tモードは 円周方向にねじるように偏向しながら長手方向に伝搬 するモードで、Fモード及びLモードは伝搬方向に 対してそれぞれ非軸対称、軸対称に偏向するモードで ある. ガイド波は分散性により位相速度  $c_p$ と群速度  $c_g$ が異なる. 例えば、中実丸棒中のLモードの分散曲 線は、丸棒の半径及び材質が分かれば、Pochhammer 方程式より算出できる<sup>1)</sup>. ここで、周波数をf、角周 波数を $\omega$ 、波数をkとすると、次式の関係がある.

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k} \tag{1}$$

また,位相速度と群速度の関係は以下のようになる.

$$c_g = c_p^2 \left[ c_p - \omega \frac{dc_p}{d\omega} \right]^{-1} \tag{2}$$



図-1 中実丸棒中を伝搬するガイド波の伝搬モード

### 3. SAFEの概要と解析解との比較

SAFEの概要を述べる.図-1に示すように,ガイド 波の伝搬方向を z 方向とする.また,x - y 面を断面 とし,z 方向に断面は一様である.任意点(x, y, z) に おける変位,応力,ひずみを,それぞれ, $u, \sigma$ ,  $\epsilon$  と する.j 番目の要素における弾性波動を支配する方程 式は仮想仕事の原理を用いて次のように書ける.

$$\int_{V_j} \left( \partial \boldsymbol{u}^* \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{V_j} \rho \left( \boldsymbol{u}^* \right)^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{u}} dV = 0 \qquad (3)$$

ここで、 $\partial$  は微分作用素、\* は複素共役、<sup>T</sup> は行列の 転置、 $\rho$  は密度、(``) は時間 t に関する 2 階微分を表 す.  $\int_{V_j} dV$  は j 番目の要素における体積積分である. また、表面力 0 の境界条件を適用している.

SAFE は, z 方向に伝搬する超音波の変位場を, 複素振幅 U を用いて表現 (フェーザ表示):

$$\boldsymbol{\iota}(x, y, z) = N(x, y)\boldsymbol{U}\exp(i\xi z - i\omega t)$$
(4)



**図**-2 SAFE の節点配置と要素

1

し、これを式(3)に代入して、固有値問題に帰着させるものである.最終的には、次式のような一般化固有値問題を解くことになる.

$$[\boldsymbol{A}(\omega) - \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{B}(\omega)]_{2M}\boldsymbol{Q} = 0 \tag{5}$$

ここで、**A**, **B**は 2*M* × 2*M*行列 (*M*は節点数×3) であり、複素数  $\omega$ の関数である.式(5)を解くことに より、2*M* 個の固有値  $\xi_m$ (*m* = 1,2,···,2*M*)が得ら れる.固有値  $\xi_m$ は *m* 番目の固有モードの波数を表し ており、 $\xi_m$ が実数の場合は伝搬モードである.固有 値  $\xi_m$ を、

$$c_p^m = \frac{\omega}{\xi_m} \tag{6}$$

に代入することで、位相速度 cp を求めることができる.

SAFE によって数値的に得られた波数-周波数の分 散関係と, Pochhammer 方程式から解析的に得られ た *L*モードの分散関係を比較したものを図-3 に示 す. SAFE はすべてのモードが同時に計算されるの で, *L*モード以外も出現している. *L*モードにおいて は, SAFE と解析解は良好に一致している.



図-3 中実丸棒における SAFE と, Pochhammer 振動方 程式から求めた分散関係の比較

#### 4. 時刻歴波形を用いた SAFE の妥当性の検証

任意断面を有する材料に超音波を送信した際に得られる時刻歴応答を用いてSAFEの妥当性を検証する. ここでは、計測実験によって時刻歴波形を得るかわりに、動弾性有限積分法(EFIT)を用いて数値的に求めた時刻歴波形を代用する.数値モデルは図-4に示すような異形鉄筋を模擬したものとした.この数値モデルの材質は縦波音速が6.3km/s、横波音速が3.1km/s、密度が=2700kg/m<sup>3</sup>であり、直径20mmの中実丸棒に半径2mmのリブが4つ付属している.z軸方向の長さは1000mmである.入力波は、中心周波数0.1MHzのトーンバースト波を用い、モデル左端より200mmの位置からz軸方向に一様な垂直応力を与えて発生させた.このときの波動伝搬の様子を図-5に示す.L モードを発生させているので、z軸に対して軸対称に偏向しながら伝搬している様子がわかる.また、モデ



図-6 時刻歴波形から得られた分散関係 (カラーマップ) と SAFE より得られた分散関係 (黒丸)の比較

ル左端より 500mm の位置から 0.4mm おきに z 方向 の変位の時刻歴応答を計 128 点出力した.その波形を 時空間フーリエ変換し,波数-周波数の分散関係を算 出した.時刻歴波形から算出した分散関係と SAFEに より得られた分散関係を比較したものを図-6 に示す. 入力波の周波数帯域付近において,時刻歴波形より得 た分散関係は SAFE の分散関係と良好に一致してい ることが分かる.

#### 参考文献

- J.L. Rose, Ultrasonic Waves in Solid Media, Cambridge University Press, New York, 1999.
- 2) 中畑和之、大月 誠、林 高弘、長尺尺材料に対する SAFEを用いたガイド波の伝搬モード解析とFITによる 検証, M&M2013 カンファレンス CD-ROM, OS0617,
- 3) 中加和之,徳永淳一,廣瀬壮一,イメージベース波動 伝搬シミュレーションと超音波探傷法のモデル化への 応用,非破壊検査, Vol.59, No.5, pp.231-238, 2010.