

一般音響異方性を有する材料中を伝搬する弾性波の ボクセル有限要素解析とその高速化

愛媛大学大学院 学生員 ○小島一朗 学生員 紙田聖也
学生員 菅原弘貴 正 員 中畑和之

1. はじめに

金属やコンクリート等の構造材料の健全性の評価手法として、超音波（弾性波）を用いた探傷試験（Ultrasonic Testing: UT）がある。近年では、発電プラントに使用されている異材溶接部や、繊維補強プラスチック等の音響異方性を有する材料に対して UT の精度向上のニーズが高まっている。音響異方性材料は、超音波の伝搬方向によって音速が異なる。また、波群が伝搬する方向と位相が進む方向が異なる場合があり、超音波が屈曲して伝搬する¹⁾。それぞれ、群速度と位相速度と呼ばれる速度で伝搬することが知られている。

超音波は不可視であるが、材料中を伝搬する超音波の挙動を把握することができれば、UT の信頼性を向上させることができる。そこで、本研究では、異方性材料中の波動伝搬を 3 次元的にシミュレーションできるツールの開発を行った。ここでは、非均質場への応用を考え、イメージベースモデリング²⁾の導入を見越して、ボクセル要素を用いた有限要素法（ボクセル FEM）を構築した。本報告の前半は、ボクセル FEM の精度を検証するために、解析的に求められた群速度曲面とシミュレーションによる超音波の可視化結果の比較を行う。また、ある方向における群速度について、解析解と数値解を詳細に比較する。ボクセル FEM は 3 次元波動場を計算するものであるが、大規模計算を高速に行うために陽解法を採用している。本報告の後半では、京都大学学術情報メディアセンターのスーパーコンピュータを用いて並列計算時の性能について検証を行った。

本研究で開発したボクセル FEM は、ある特定の異方性材料だけでなく、数学的に考え得るすべての音響異方性を扱うことができるという意味で、一般音響異方性という言葉を用いている。

2. 異方性材料中を伝搬する超音波の数値解析

本研究では、デカルト座標系を採用する。位置 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ における時刻 t の変位を $u_i(\mathbf{x}, t)$ 、せん断応力を $\tau_{ij}(\mathbf{x}, t)$ とすると異方性弾性体中の弾性波の伝搬を支配する方程式は、以下のようになる。

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \tau_{i\beta}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_\beta} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}, t) = c_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial x_\beta} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

ここで、 $\{\ddot{\cdot}\}$ は時刻 t に関する偏微分 $\partial^2/\partial t^2$ 、 $c_{ij\alpha\beta}$ は弾性スティフネス、 ρ は密度である。上式で α と β に総和規約を適用する。

式 (1) と (2) から重み付き残差式を作り、ガウスの発散定理を用いて弱形式に変形する。次に、弱形式を 8 節点 6 面体要素（ボクセル要素）を用いて離散化する。離散化後は、次のような代数方程式となる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{d}$ は節点上の変位を格納した行列、 $\mathbf{M}$ は質量行列、 $\mathbf{K}$ は剛性行列、 $\mathbf{f}$ は表面力などの既知量が保存される行列である。

次に、時間軸の離散化について述べる。式 (3) を陽的に更新することを考える。そのためには、質量行列を集中化 ($\mathbf{M} \approx \bar{\mathbf{M}}$) する方法が最も効率的である。 $\mathbf{d}$ について、時間方向に中心差分近似を適用すれば、以下のような更新スキームとなる。

$$\mathbf{d}^{h+1} = (2\mathbf{E} - \Delta t^2 \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{d}^h + \Delta t^2 \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{f}^h - \mathbf{d}^{h-1} \quad (4)$$

ここで、 h は時間ステップを表す整数、 $\mathbf{E}$ は単位行列、 Δt は時間間隔である。材料定数はボクセル要素内で一定とし、表面力 $\mathbf{f}$ も要素の辺上で一定とする。式 (4) の計算で、全節点について剛性行列 $\mathbf{K}$ を作ると膨大なメモリーを要するので、実際には各節点の更新に必要な $\mathbf{K}$ だけを計算する。また、大規模計算のために、MPI および OpenMP ライブラリを使用した並列計算³⁾を導入している。MPI 通信時には、副領域における袖部を 1 層だけ交換する。

3. 群速度曲面の検証

ここではボクセル FEM の精度を検証する。シミュレーションによって計算した超音波と解析的に求めた群速度曲面を比較する。材料はオーステナイト系ステンレス鋼を考える。この材料は立方晶系であり、弾性スティフネスは、 $c_{1111}=212.02\text{GPa}$ 、 $c_{1122}=133.22\text{GPa}$ 、 $c_{2323}=119.58\text{GPa}$ 、 $\rho=7880\text{kg/m}^3$ である。Christoffel 方程式から求めたオーステナイト系ステンレス鋼の P、S1、S2 波の群速度を図-1(a) に示す。なおオーステナイト系ステンレス鋼は立方晶であるため、 $x_1 - x_2$ 、 $x_1 - x_3$ 、 $x_2 - x_3$ 面のいずれも群速度曲面は同じである。

次に、ボクセル FEM で、オーステナイト系ステンレス鋼を伝搬する超音波を計算する。モデルは 1 辺が

30mm の立方体とし、モデルの真ん中から中心周波数 1MHz の超音波を入射する。このとき、立方体の中心部において x_3 方向に応力を励起させることで超音波を発生させた。モデルは 0.05mm のボクセルによってメッシュ分割した。また CFL 条件より $\Delta t=0.0045\mu s$ と設定し、4000 ステップの時間更新を行った。ここで時刻 $6.48\mu s$ における各断面における波動伝搬のスナップと Christoffel 方程式より求めた解析解の比較を図-1(b)~(d) に示す。この結果から、ボクセル FEM で計算した波動は、Christoffel 方程式の群速度曲面に沿って伝搬していることがわかる

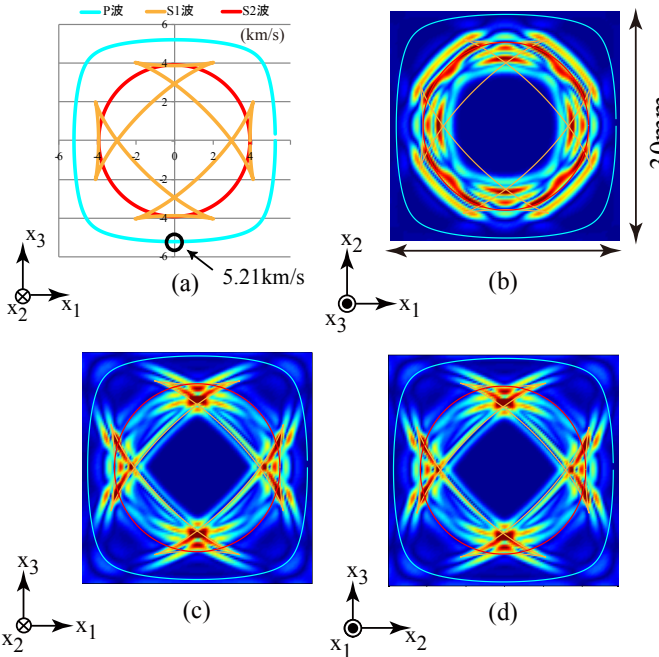


図-1 Christoffel 方程式より求めたオーステナイト系ステンレス鋼の群速度分布 (a) とボクセル FEM によって計算した各断面における変位の可視化結果 (b)~(d)

4. 波動伝搬速度の精度検証

本シミュレーションの精度を詳細に検証する。オーステナイト系ステンレス鋼について、図-2 の左側に示すような 1 辺が 30mm の立方体の上部から中心周波数 1MHz の超音波を発生させ、A 点と B 点の 2 点で波形を出力させる。このときモデルは 1 辺が 0.05mm のボクセルによってメッシュ分割した。なお CFL 条件より $\Delta t=0.0045\mu s$ と設定した。図-2 より A 点と B 点の距離は 2.5mm である。また図-2 の右に A 点と B 点で得られる超音波の x_3 方向の振幅をプロットした。このとき点 A と点 B に超音波が到着する時間の差と 2 点間の距離より、超音波の伝搬速度を求める。図-2 より、到達時間差を求めると $0.48\mu s$ となる。これより数値解を求めると 5.19km/s となった。

伝搬速度の解析解は、Christoffel 方程式より求めた群速度曲面から対応する方向の群速度の値を読み取ることにより得られる。図-1(a) より、 x_3 軸の下

度を読み取ると解析解は 5.21 km/s である。従って相対誤差は 0.38% であり、シミュレーションの精度は実用的に十分であることが分かった。

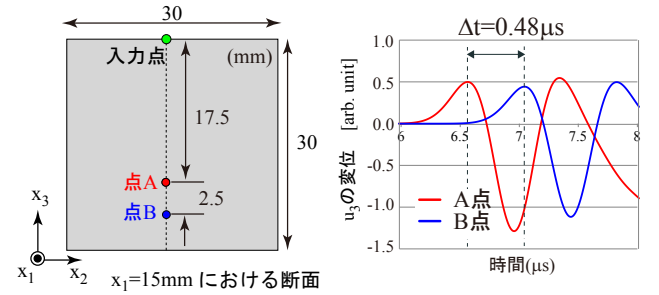


図-2 数値モデル中の出力点の位置 (左) とオーステナイト系ステンレス鋼中の出力点における変位 u_3 (右)

5. 計算時間の比較

ここでは並列計算を実施し、ボクセル FEM の計算速度について調べた。解析に用いたモデルは 1 辺 30mm のオーステナイト系ステンレス鋼の立方体である。このモデルの総ボクセル数は 8,000,000 であり、4000 ステップの時間更新を行ったときの計算時間を計測した。京都大学学術情報メディアセンターのシステム A を用いた。使用するコア数の合計は 32 とし、プロセス並列、スレッド並列、ハイブリッド並列について調べた。ハイブリッド並列についてはプロセス数が 8 でスレッド数が 4 のハイブリッド並列 A と、プロセス数が 16 でスレッド数が 2 のハイブリッド並列 B の 2 通り実験した。その結果を表 1 に示す。図-1 より計算速度はプロセス並列が最も速く、2 番目にハイブリッド並列、3 番目にスレッド並列という順で高速であることがわかった。またハイブリッド並列 A と B を比較するとスレッド数の小さいハイブリッド並列 Bの方が計算速度が速いという結果となった。これらの結果より、共有メモリ型より分散メモリ型計算を用いた方が京都大学のシステムでは計算速度が速いということが明らかになった。

表 1 並列計算に要する実行速度の比較

	プロセス並列 (Flat MPI)	スレッド並列	ハイブリッド 並列A	ハイブリッド 並列B
プロセス数M	32	1	8	16
スレッド数N	1	32	4	2
計算時間 (min)	28.09	38.56	34.07	28.69

参考文献

- 1) B.A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids, Vol.1*, Kreiger Publishing, 1990.
- 2) 中畑和之, イメージベースモデリングによる超音波伝搬シミュレーション, 日本音響学会誌, Vol.67, No.7, pp.273-278, 2011.
- 3) M.-J. Quinn, *Parallel Programming in C with MPI and OpenMP*, McGraw-Hill, 2003.