

2次元空間における土地利用パターンの自己組織化

愛媛大学 学生会員 ○山本誠也

愛媛大学 正会員 高山雄貴

愛媛大学 正会員 吉井稔雄

1. はじめに

近年、世界中で人間の営みの結果現れる様々な立地パターン(e.g.,大都市の誕生,人種の違いによる住み分け)がみられており,これらは人間同士の相互作用から生まれている.同様に,都市内の土地利用(e.g.,商店街)においても,敷地間・用途間の相互作用の結果,何らかの秩序に基づいて空間が構成されていると考えられる.

青木¹⁾では,確率論的モデルを用いて都市内において創発する土地利用パターンを明らかにした.しかし,同研究は1次元空間における研究にとどまっている.より具体的には,敷地が線上に存在し,各敷地の用途は2種類に限定されているため,現実の都市への適用が困難なものとなっている.

そこで,本研究では,2次元空間において,自発的に形成される土地利用パターンを明らかにする.そのために,青木を2次元空間を扱えるものに拡張する.そして,安定的均衡解として創発する土地利用パターンを示す.

2. モデル

(1) 確定的効用関数

都市内には,離散的な敷地 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ が存在する.敷地 i での土地利用状態は土地利用の種類 $a \in \{1, 2, \dots, l\}$ の割合 y_i^a と,そのベクトル $\mathbf{y}_i = [y_i^a]$ により表す.また,都市全体の土地利用の表現に,各敷地の土地利用状態を表すベクトル $\mathbf{y} = [y_i]$ を用いると,敷地 i の住民が土地利用の種類を a とする場合の確率的効用 $u_i^a(\mathbf{y})$ は次のように表される.

$$u_i^a(\mathbf{y}) = d_i^a(\mathbf{y}) + \varepsilon_i^a \quad (1)$$

ここで, ε_i^a は不確実な影響を表す確率変数であり,ガンベル分布に従う.また,確定的効用 $d_i^a(\mathbf{y})$ は,次のように表される.

$$d_i^a(\mathbf{y}) = \alpha_i^a + \sum_{j=1}^n \sum_{a=1}^l \alpha_{ij}^{ab} y_j^b, \quad y_j^b = \frac{x_j^a}{\sum_{b=1}^l x_j^b} \quad (2)$$

ここで, x_j^a は敷地 j における用途 a の数である.(2)式は,敷地 i の用途を a とする場合には,敷地 i 自身から α_i^a の効用が得られ,同時に周辺敷地 j の用途 y_j^b に従って $\alpha_{ij}^{ab} y_j^b$ の効用が得られることを意味する.

(2) 均衡条件

本稿では,(1)式のように効用関数が確定項と確率項から構成されると考える.このとき,用途 a が敷地 i に立地する確率 $p_i^a(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ は次のように与えられる.

$$p_i^a(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \frac{\exp[\theta \alpha_i^a(\mathbf{y}(\mathbf{x}))]}{\sum_{j=1}^n \exp[\theta \alpha_j^a(\mathbf{y}(\mathbf{x}))]} \quad (3)$$

ここで, θ は知覚誤差の分散パラメータである.したがって,均衡条件は次のように表現される.

$$x_i^a = p_i^a(\mathbf{y}(\mathbf{x})) X^a \quad (4)$$

ここで, X^a は用途 a の総数である.

(3) 調整ダイナミクスと解の安定性

土地利用用途の数 \mathbf{x} が,均衡状態に到達するまでの調整ダイナミクスを $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ として,logit型のperturbed best response dynamics²⁾を採用する.この調整ダイナミクスの定常状態(i.e., $\mathbf{F}(\mathbf{y}(\mathbf{x}^*)) = 0$)を満たす \mathbf{x}^* を均衡状態と定義する.

均衡状態の安定性は,Jacobi行列 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ の固有値の実部の符号により判断できる.より具体的には $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ の固有値の実部が全て負であれば均衡解は局所安定的であり,固有値の符号が切り替わることで分岐現象が起こる.このとき,固有値に対応する固有ベクトルの方向に安定的な均衡解が存在する.

3. モデルの分岐解析

(1) 空間構造・土地利用間の相互作用に関する仮定

本稿では,図-1に示すような $n=6, l=2$ としたケースについて議論する.都市内の敷地の空間構造は,一様空間であり,周期境界を持つ2次元空間であると仮定する.各々の敷地の空間条件は同一であり,各敷地は他敷地との距離に応じた影響を受け,具体的には距離が大きい程,敷地間相互作用の影響は小さくなる.

また、土地利用間の相互作用に関しても一様な状況を考え、土地利用の性質の近さに応じた影響が生じる。さらに、 $\alpha_i^a, \alpha_{ij}^{ab}$ は次のように与えられると仮定する。

$$\alpha_i^a = \alpha, \quad \alpha_{ij}^{ab} = \gamma_{ab} \delta_{ij} \quad (5)$$

ここで、 γ_{ab}, δ_{ij} は、各々、土地利用 a, b 間、敷地 i, j 間の相互作用の影響を表すパラメータである。 a, b 要素が γ_{ab} となる行列 $\gamma = \text{circ}[\gamma_0, \gamma_1]$ は、 $|a-b|=0$ の時、自身の土地利用からの影響 γ_0 を受け、 $|a-b|=1$ の時、他の土地利用からの影響 γ_1 を受けることを意味する。また、 i, j 要素が $\delta_{ij} = r^{c(i,j)}$ となる行列 δ は $D_{[6]} \equiv \text{circ}[1, r, r^2, r^3, r^4, r^5]$ のクロネッカー積 $D_{[6]} \otimes D_{[6]}$ である。 $r^{c(i,j)}$ は相互作用によるパラメータであり、 i, j 間の距離 $c(i, j) = \min\{|i-j|, 6-|i-j|\}$ に依存する。

この時、敷地間・土地利用間の相互作用を表す、第 a, b 要素が α_{ij}^{ab} となる行列 $A \equiv [\alpha_{ij}^{ab}]$ は、Block Circulant with Circulant Blocks³⁾(以降、BCCB)の性質を持つ。すなわち、そのブロック行列 A^{ab} は全て巡回行列の順に並び、かつブロック行列自体も巡回行列となる。したがって、その固有値 $f = [f_i^a]$ は3次元離散Fourier変換行列による相似変換を施すことによって得られる。

$$\text{diag}[f] = (\mathbf{Z}_{[n]} \otimes \mathbf{Z}_{[n]} \otimes \mathbf{Z}_{[l]})^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{Z}_{[n]} \otimes \mathbf{Z}_{[n]} \otimes \mathbf{Z}_{[l]}) \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{Z}_{[n]}$ は $n \times n$ の離散Fourier変換行列である。

(3) 調整ダイナミクスのJacobi行列の固有値

本節では、初期自明解として $\bar{x} = (1/n)\mathbf{I} = (1/36)\mathbf{I}$ を設定し、この状況から安定均衡解として創発する土地利用パターンを示す。このとき、調整ダイナミクスのJacobi行列は、BCCBとなる。したがって、 $\nabla F(\bar{x})$ の固有値 $g = [g_i^a]$ は3次元離散Fourier変換により、次のように与えられる。

$$g_i^a = \frac{\theta}{36} \frac{X^a}{X_i} \left(1 - \frac{1}{36} e_i^a \right) \hat{e}_i^a f_i^a - 1 \quad (7)$$

ここで、 X_i は敷地 i の用途の総数である。

また、 e_i^a は対角ブロックに $\mathbf{E}_{[6]}, \mathbf{E}_{[6]}, \dots, \mathbf{E}_{[6]}$ をもつ $\text{diag}[\mathbf{E}_{[6]}, \mathbf{E}_{[6]}, \dots, \mathbf{E}_{[6]}]$ の第 $6(a-1)+i$ 固有値である。 $\mathbf{E}_{[6]}$ は全ての要素が1の 6×6 行列であり、 e_i^a は $i=1$ ならば36、 $i \neq 1$ ならば0となる。さらに、 \hat{e}_i^a は $\text{circ}[5/6, 0, 0, 0, -1/6, 0, 0, 0]$ の第 $6(a-1)+i$ 固有値であり、 $a=1$ ならば0、 $a \neq 1$ ならば1となる。ここで、均衡解の分岐後に発生する土地利用パターンを表す $\nabla F(\bar{x})$ の固有ベクトル \mathbf{z}_i^a は $\mathbf{Z}_{[n]} \otimes \mathbf{Z}_{[n]} \otimes \mathbf{Z}_{[l]}$ の第 $n(a-1)+i$

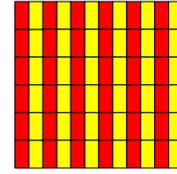


図-1 2用途地域・6×6敷地空間構造

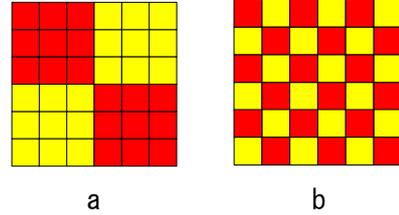


図-2 創発する土地利用パターン

ベクトルで与えられる。以上の性質を利用すると、2次元土地利用モデルの分岐特性が解析的かつ容易に明らかにされる。

(4) 分岐解析

調整ダイナミクスのJacobi行列の固有値 g は、次のように表される。

$$g_i^a = \begin{cases} -1 & \text{if } a=1 \text{ or } i=1 \\ \frac{\theta}{36} \frac{X^a}{X_i} f_i^a - 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

$$f_i^a = \begin{cases} d_{6(i-1)+j}(\gamma_0 + \gamma_1) & \text{if } a=1 \\ d_{6(i-1)+j}(\gamma_0 - \gamma_1) & \text{if } a=2 \end{cases} \quad (9)$$

$d_{6(i-1)+j}$ は δ の第 $6(i-1)+j$ 固有値である。

以上より、 $\gamma_0 - \gamma_1$ の符号に応じて、創発する土地利用パターンが変化する。具体的には、 $\gamma_0 - \gamma_1 > 0$ であれば、同じ土地利用が集まるインセンティブが働き、図-2aのようにクラスタ構造を持った土地利用状態となる。一方、 $\gamma_0 - \gamma_1 < 0$ であれば、同じ土地利用が隣接することを嫌がるインセンティブが働き、図-2bのように隣接敷地の土地利用が各々異なる状態となる。

5. おわりに

本研究では、青木を2次元空間を扱えるものに拡張した。そして、安定性解析により、自発的に形成される土地利用パターンを明らかにした。その結果、敷地間・用途間の相互作用の違いに応じて、異なる土地利用パターンが創発することが示された。

【参考文献】

- 1) 青木義次, 都市変容の確率過程, 大学教育出版, 2009.
- 2) Fudenberg, D. and Levine, D. K., *The Theory of Learning in Games*, MIT Press, 1998.
- 3) Davis, P. J., *Circulant Matrices*, John Wiley & Sons, 1979.