板波の伝搬モードの数値解析と動弾性有限積分法による検証

愛媛大学大学院　学生員　○大谷憂馬
愛媛大学大学院　正　員　　中畑和之

1. はじめに

超音波探傷 (UT) において，バルク波は固体中で広がり減衰も大きいため，検査範囲は探触子の直下あるいは斜め方向の数十 cm 程度である．それに対してガイド波 [1] は，平板や配管などの長尺材料の検査に適し，有効な検査範囲は数メートルから数十メートルにも及ぶため，長距離の超音波探傷への応用が注目されている．しかし，その伝搬速度は周波数や板厚に依存し，位相速度と群速度が分散性を示す．また，ひとつの周波数に対して複数の伝搬モードが同時に存在する重畳性を有する．平板のような簡単な断面形状においては，ガイド波の伝搬モードは解析的に求まる．しかし，鉄道のレールのような複雑な断面形状を有する長尺材料の伝搬モードは，数値解析を利用して求める必要がある．

本研究では，長尺材料の伝搬モードを数値的に求めるため，半解析的有限要素法 [2](Semi-analytical FE 法，以下 SAFE) を適用し，SAFE の妥当性について検討を行う．ここでは，SAFE によって得られる解と Rayleigh-Lamb 方程式の解 [3] を比較すると共に，動弾性有限積分法 [4](EFIT) で得られた波動伝搬における時刻歴波形を用いた検証を行う．

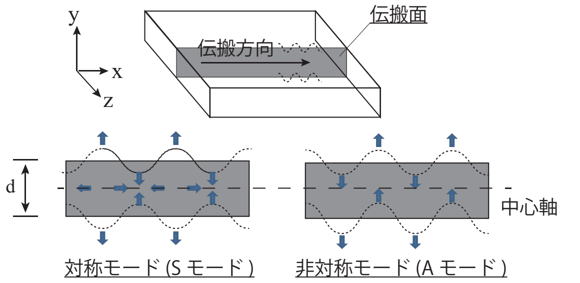
2. 板波と伝搬モード

板中のガイド波は板波とも呼ばれ，SH 波と Lamb 波 [3] が存在することが分かっている．SH 波は伝搬面に対して面外方向に偏向し，Lamb 波は偏向方向が面内であり，いずれも長手方向へ伝搬する．本研究では，Lamb 波について比較を行う．Lamb 波の伝搬モードは，対称モード (S モード) と非対称モード (A モード) に分類される (図-2.)．板波を考えるとき，位相速度 c_p と群速度 c_g の把握が重要である．均質等方性の広い材料中を伝搬するバルク波の場合，位相速度と群速度は一致するが，板波の場合は分散性によりこれらが異なる．各伝搬モードの位相速度の分散曲線は，板の材質と板厚が分かれば Rayleigh-Lamb 方程式より算出できる．ここで，周波数を f，角周波数を ω，波数を k とすると，次式の関係がある．

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k} \tag{1}$$

また，位相速度と群速度の関係は以下のようになる．

$$c_g = c_p^2 \left[c_p - \omega \frac{dc_p}{d\omega} \right]^{-1} \tag{2}$$



図– 1　Lamb 波の対称モードと非対称モード

3. SAFE による板波の伝搬モードの求解

SAFE に関する詳細は論文 [2] にあるのでここでは要約を述べる．図-2. に示すように，板波の伝搬方向を x 方向とし，$x-y$ 面で偏向する超音波を考える．なお，z 方向に形状は一様である．任意点における変位，応力，表面力を，それぞれ，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{t}$ とする．j 番目の要素における弾性波動を支配する方程式は仮想仕事の原理を用いて次のように書ける．

$$\int_{A_j} (\boldsymbol{\partial} \boldsymbol{u}^*)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} dA + \int_{A_j} \rho (\boldsymbol{u}^*)^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{u}} dA = \int_{S_j} (\boldsymbol{u}^*)^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{t}} dS \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{\partial}$ は微分作用素，* は複素数共役，^{T} は行列の転置，ρ は密度，$(\ddot{\ })$ は時間 t に関する 2 階微分を表す．図-3. に示すように，$\int_{S_j} dS$ と $\int_{A_j} dA$ は j 番目の要素における線積分と面積分である．

SAFE では，x 方向に伝搬する超音波を，定常場において複素振幅を用いて表現 (フェーザ表示) し，これを式 (3) に代入して，固有値問題に帰着させるものである．最終的には，次式のような一般化固有値問題を解くことになる．

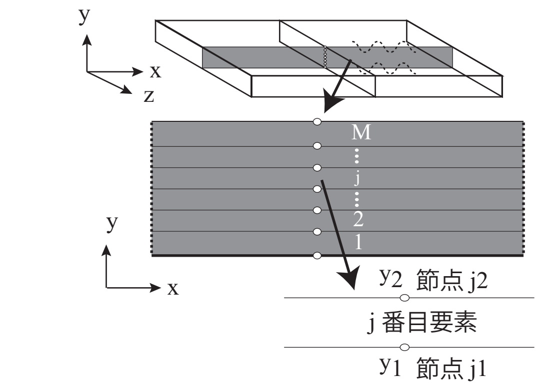
$$[\boldsymbol{A}(\omega) - \xi \boldsymbol{B}(\omega)]\boldsymbol{Q} = 0 \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ は $2M \times 2M$ 行列 (M は要素数) であり，複素数 ω の関数である．これより $2M$ 個の固有値 ξ_m が得られる．固有値 ξ_m は m 番目の固有モードの波数を表しており，ξ_m が実数の場合，m 番目のモードは伝搬モードである．また，A モードか S モードかについては，固有ベクトルを精査し，偏向の卓越する方向で決定することができる．固有値 ξ_m を，次式，

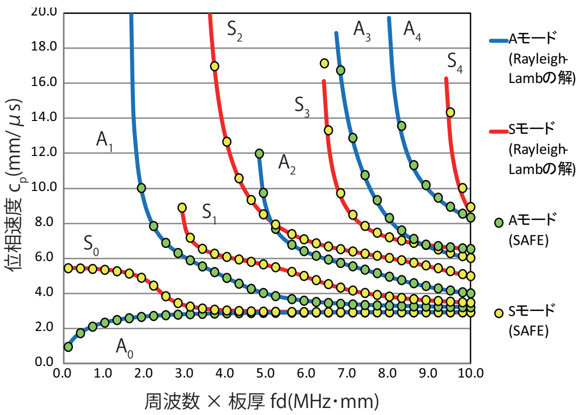
$$c_p^m = \frac{\omega}{\xi_m} \tag{5}$$

に代入することで，位相速度 c_p を求めることができる．固有値問題を解くライブラリとして LAPACK の複素一般化非対称固有値問題ルーチンを用いる．

SAFE によって得られた位相速度の分散関係と Rayleigh-Lamb 方程式から解析的に求めた分散曲線を比較したものを図-2 に示す．この結果から SAFE の精度は良好であることが分かる．



図– 2 板波を対象とした SAFE の節点と要素

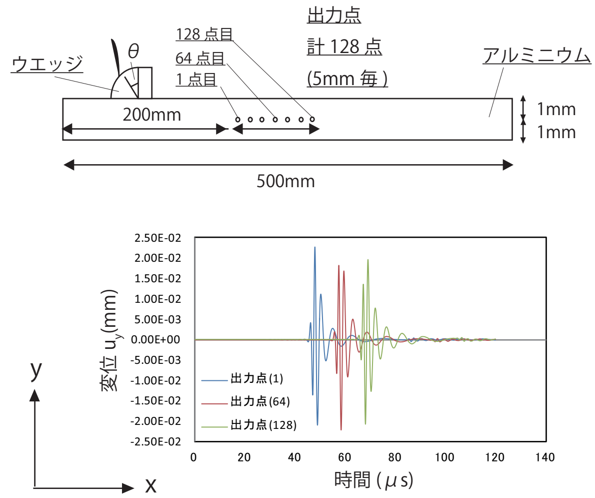


図– 3 SAFE から求めた分散関係と Rayleigh-Lamb 方程式から求めた分散曲線の比較

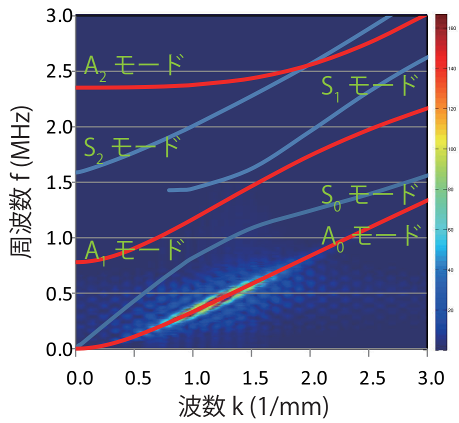
4. 時刻歴波形を用いた SAFE の妥当性の検証

超音波を送信した際に得られる時刻歴応答を用いて SAFE の妥当性を検証する．ここでは，計測実験によって時刻歴応答を得るかわりに，動弾性有限積分法 (EFIT) による波動伝搬シミュレーションによって得られた時刻歴応答を用いて検証を行った．シミュレーションのための数値モデルを図-4. の上部に示す．板厚を 5mm，板の長さを 500mm とし，材質はアルミニウム (縦波音速:6350m/s，横波音速:3130m/s，密度:2700kg/m^3) とした．また，A_0 モードを卓越して発生させるために，板の上部にウエッジ (縦波音速:1500m/，密度:1100kg/m^3) を置いて，そこからアルミニウム中に超音波を送信する．このときの入射角を θ=39.93 度，送信波の中心周波数を 0.5MHz とした．EFIT では，計算モデルの左端から 200mm の位置より，5mm ごとに 128 点の時刻歴応答を出力した．y 方向の変位の時刻歴応答 u_y の一部を図-4. の下部に示す．

128 点で得られた波形 u_y を時空間フーリエ変換し，波数 k と周波数 f の分散関係を得る．時刻歴応答によって得られた分散関係と SAFE による分散曲線を比較したものを図-4 に示す．送信波の周波数帯域は 0.5MHz 前後であるので，この付近では，EFIT の k-f 関係は SAFE の分散曲線上にほぼプロットされている．これらの結果より，時刻歴波形を用いて SAFE の妥当性が検証できた．



図– 4 板波伝搬の数値モデルと出力点における時刻歴波形



図– 5 時刻歴応答から得られた分散曲線と SAFE による分散曲線の比較

参考文献

1) J. L. Rose：*Ultrasonic Waves in Solid Media*，Cambridge University Press，New York，1999.
2) T. Hayashi and J. L. Rose：Guided wave simulation and visualization by a semi analytical finite element method，Materials Evaluation，Vol.61，No.1，pp.75-79，2003.
3) 尾上守夫，高木幹雄：板を伝わる超音波，生産研究，Vol.18，No.12，pp.319-332，1996.
4) 中畑和之，徳永淳一，廣瀬壮一：イメージベース波動伝搬シミュレーションと超音波探傷法のモデル化への応用，非破壊検査，Vol.59，No.5，pp.231-238，2010.