【Ⅰ－44】

波動解析のためのイメージベースFEMの開発と性能検証

愛媛大学大学院　学生員　○田中貴之
愛媛大学大学院　正　員　　中畑和之

1. はじめに

デジタル写真等の直交格子データ，あるいはCADやCT画像等の立方格子データから計算モデルを作成し数値解析を実行する手法は，イメージベースモデリングと呼ばれている．筆者らはこれまで差分型解法である動弾性有限積分法 (EFIT) をイメージベースモデリングへ適用するための検討を行ってきた[1]．しかし，要素形状が正方形 (3次元では立方体) であれば，EFITだけでなく有限要素法 (FEM) 等の領域型解法も適用可能である．そこで本研究では，ボクセル要素を採用したFEMについて波動解析コード (イメージベースFEM) を作成し，解の精度検証を行うと共に，計算時間や並列化効率等の性能についても調べる．

2. イメージベース有限要素法 (FEM)

本論文では，簡単のため，弾性波が伝搬する材料は等方性であるとし，2次元SH波動場を考える．x_3 軸を面外方向とし，SH波は (x_1,x_2) を伝搬するものとする．x_3 軸方向の変位を u_3，せん断応力を τ_{31}，τ_{32} とすれば，SH波の伝搬を支配する波動方程式および構成式は以下のようになる．

$$\rho(\boldsymbol{x})\ddot{u}_3(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial\tau_{31}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{32}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_2} \tag{1}$$

$$\frac{\tau_{31}(\boldsymbol{x},t)}{\mu(\boldsymbol{x})} = \frac{\partial u_3(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_1},\quad \frac{\tau_{32}(\boldsymbol{x},t)}{\mu(\boldsymbol{x})} = \frac{\partial u_3(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_2} \tag{2}$$

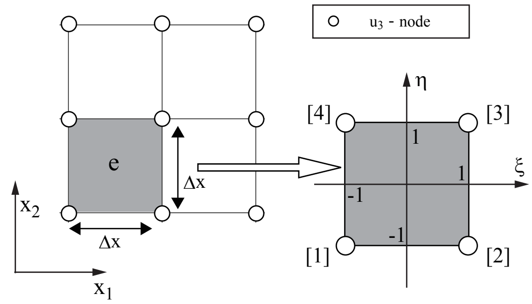
ここで，$\ddot{()}$ は時間 t に関する偏微分 $(\partial^2/\partial t^2)$ を表す．上式で，ρ は材料の密度，μ はせん断弾性係数を表し，横波音速との関係式 $c_S = \sqrt{\mu/\rho}$ が成立する．式 (1) と (2) から弱形式を導出し，これを図–1に示すアイソパラメトリック要素 (4節点正方形要素) を用いて離散化すると，次の代数方程式を得る．

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{M}$ は質量行列，$\boldsymbol{K}$ は剛性行列であり[2]，$\boldsymbol{f}$ は既知表面力からなる外力ベクトルである．式 (3) は空間に対して離散化されているため，$\boldsymbol{d}$ に関する2階の連立常微分方程式とみなされる．

次に，時間軸の離散化について述べる．いま，現在の時刻ステップを k とし，その時刻から Δt 前後の時刻に対応するステップを $k-1$ と $k+1$ とすれば，現在の時刻の加速度 $\ddot{\boldsymbol{d}}^k$ は中心差分式で次のようになる．

$$\ddot{\boldsymbol{d}}^k \approx \frac{1}{\Delta t^2}(\boldsymbol{d}^{k+1} - 2\boldsymbol{d}^k + \boldsymbol{d}^{k-1}) \tag{4}$$



図–1 イメージベースFEMにおける要素形状．

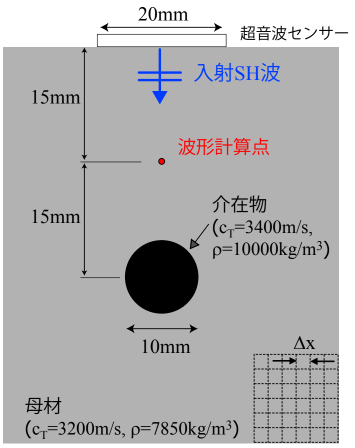
式 (4) を式 (3) に代入すると

$$\boldsymbol{d}^{k+1} = (2\boldsymbol{E} - \Delta t^2\tilde{\boldsymbol{M}}^{-1}\boldsymbol{K})\boldsymbol{d}^k + \Delta t^2\tilde{\boldsymbol{M}}^{-1}\boldsymbol{f}^k - \boldsymbol{d}^{k-1} \tag{5}$$

が得られる．なお，上式の質量行列において，各行の成分の総和を対角項とする対角化 $\tilde{\boldsymbol{M}} \approx \boldsymbol{M}$ を行っている．上式は現在の時刻ステップ k における値と Δt 前のステップ $k-1$ の値を用いて，Δt 後のステップ $k+1$ における変位が求められることを意味している．このとき，変位ベクトル $\boldsymbol{d}$ の成分が独立となるために陽的な解法となり，単純な代入計算で変位が逐次求められる．FEMにおける材料定数は図–1に示す1つの要素内で一定とする．また表面力も要素の辺上で一定とする．これによって，デジタル画像のピクセルとFEMの要素を1対1に対応させることができる．異種介在物の結合条件は隣り合う要素に異なる材料定数を与えることで，暗に満たされる．

3. イメージベースFEMの精度検証

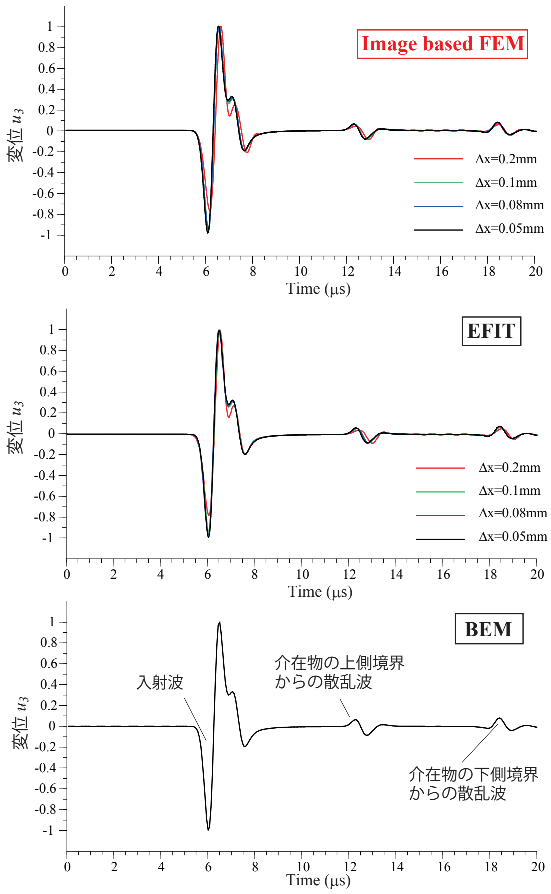
イメージベースFEMは要素が正方形であるので，散乱体あるいは外側境界が曲線形状をしている場合でも階段状にしか近似できないという欠点がある．このため，できるだけ要素長を小さく設定することで解の精度を上げなければならない．しかし，むやみに小さく設定すれば計算機のメモリーが不足してしまうし，大きすぎれば散乱体の形状を正確に模擬できないだけでなく，弾性波の伝搬を表現できない（数値振動の発生）といった問題が生じる．以下では，簡単な数値実験によって，必要な要素長 Δx について検討を行う．図–2に示すように，c_S=3200m/s，ρ=7850kg/m^3 の母材に直径10mmの円形の介在物 (c_S=3400m/s, ρ=10000kg/m^3) がある．ここでは，上方に置かれた長さ20mmの波源領域からSH波が発振されるものとする．散乱が顕著になるのは，入射波の波長に対して散乱体が大きい場合であるので，入射波の中心周波数を



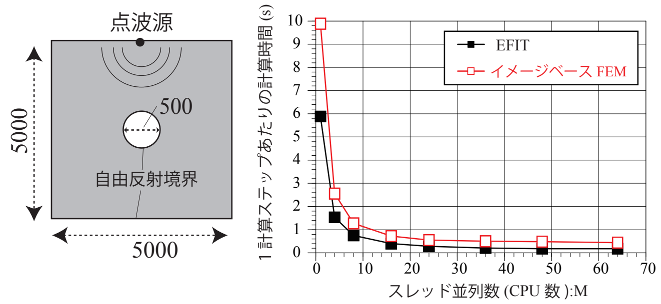
図– 2 精度検証のための数値モデル．

1MHz として，介在物に対して短い波長 (λ=3.2mm) の超音波を送信する．このとき，波源と空洞の中間位置で面外変位 u_3 を計算する．時間ステップ幅はすべて Δt=10ns とした．

Δx= 0.2，0.1，0.08，0.05mm と変化させて計算を行った場合に，波形計算点において得られた波形を図–3 に示す．ここでは，差分型解析法である EFIT[1] と境界型解析法である BEM[3] と解を比較している．図–3 の上段がイメージベース FEM，中段が EFIT，下段が BEM によるものである．BEM は解に対して要素



図– 3 イメージベース FEM において，Δx を変えた場合の波形計算点の波形，および他の解法との精度比較．



図– 4 スレッド数 (CPU 数) を変化させた場合の，イメージベース FEM の計算時間．

形状の依存性が少ないので，ここでは一定要素 (介在物境界を 640 分割) でモデル化した結果のみを記載している．図–3 に示す第 1 波目は入射波が通過したときの波形，第 2 波目は介在物の上界面によって散乱された波動，第 3 波目は送信波が介在物中を伝搬して介在物の下界面から散乱した波動である．BEM と同程度に解の精度を得るためには，イメージベース FEM では Δx=0.1mm 程度に分割する必要がある．また，イメージベース FEM と EFIT では，同じ要素サイズの場合には，ほぼ同じ結果となることがわかる．

3.1 計算時間の比較

計算に必要な時間について検証するために，京都大学学術情報メディアセンター SPARC Enterprise M9000 クラスタを用いて数値実験を行った．数値実験では，総要素数が 2500 万個の正方形の計算領域を考える．計算領域の上表面から波動を発生させた場合に，M 個の CPU を使用した場合の並列計算に要する時間を検証した．1 ステップあたりの平均時間を図–4 の右側に示している．著者らの作成したコードでは，イメージベース FEM は EFIT よりも計算速度が約 1.6 倍程多く要することがわかる．

4. まとめ

イメージベース FEM では正方形の要素を用いるため，対象とするモデルが屈曲している場合は階段状にしか近似できないが，適切に要素を小さくすることによって，BEM と同程度の精度で計算が可能であることを示した．同じ要素サイズを用いた場合，EFIT に比べてイメージベース EFIT は計算時間を多く要する結果となったが，今後は，音響異方性問題や 3 次元問題でも同様の検討を行いたいと考えている．

参考文献

1) 中畑和之ら: 動弾性有限積分法を用いた波動伝搬解析のためのためのイメージベースモデリング，計算数理工学論文集，Vol.7, No.2, pp.267-272, 2008.
2) Fish, Y. and Belytschko, T. (著)，山田貴博 (監訳): 有限要素法，pp.195–200, 丸善, 2008.
3) Niwa, Y., *et al.* : The BIE approach to transient wave propagation problems around elastic inclusions, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.32, pp.183–198, 1982.