Ⅰ-29　最小ポテンシャルエネルギーの原理に基づく複合非線形トラス構造物の最適設計法

愛媛大学工学部　正員　谷脇一弘
松山市役所　正員　○依光慶典

1. はじめに

谷脇らは最小コンプリメンタリーエネルギーの原理および数理計画法を用いて複合非線形トラス構造物の最適設計を能率的に行う方法について研究を行ってきている。しかしこの方法は、完全弾塑性体の材料を考慮することが困難であることも明らかとなっている。

本研究では、完全弾塑性体の材料も考慮することができる最小ポテンシャルエネルギーの原理に着目し、複合非線形トラス構造物の解析および最適設計を行う方法について研究を行い、本法の有効性および信頼性について検討を行ったものである。

2. ポテンシャルエネルギー最小化による複合非線形解析法

各節点の変位量$\mathbf{u}$および部材の伸び$\boldsymbol{\delta}$を考慮した変形状態におけるトラス構造物において、部材iのポテンシャルエネルギー$\Pi_{Pi}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{u})$は次式で表される。

$$\Pi_{Pi}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{u})=\alpha_i(\delta_i)A_i l_i(\mathbf{u}) \tag{1}$$

ここに、A_iおよび$l_i(\mathbf{u})$はそれぞれ部材i断面積および変形後の部材長である。$\alpha_i(\delta_i)$はポテンシャルエネルギー密度であり次式で与えられる。

$$\alpha_i(\delta_i)=\int_0^{\delta_i}\sigma_i(\delta_i)d\delta_i \tag{2}$$

ここに、σ_iは部材iの応力度である。

n個の部材からなるトラス構造物の全ポテンシャルエネルギー$\boldsymbol{\Pi}_P(\boldsymbol{\delta},\mathbf{u})$は、式(1)で表される部材$i$のポテンシャルエネルギー$\Pi_{Pi}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{u})$を、全ての部材について加え合わせ、さらに可動節点に作用する外力のポテンシャルエネルギーを加えることにより次式より求められる。

$$\boldsymbol{\Pi}_P(\boldsymbol{\delta},\mathbf{u})=\sum_{i=1}^{n}\Pi_{Pi}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{u})-\mathbf{P}^T\mathbf{u} \tag{3}$$

ここに、$\mathbf{P}^T$は各可動節点に作用する外力である。

トラス構造物の各部材要素に使用する材料が異なる場合には、式(2)の$\alpha_i(\delta_i)$の計算において、各部材に使用する材料の応力度－ひずみ関係に対応した関数を用いなければならない。

最小ポテンシャルエネルギーの原理に基づきトラス構造物の真の伸び$\boldsymbol{\delta}^*$および変位$\mathbf{u}^*$を決定する問題は、$\boldsymbol{\delta},\mathbf{u}$を変数として考慮し、変形状態における部材の伸びと変位の関係および力の釣合方程式を制約条件として考慮したポテンシャルエネルギー最小化問題として定式化することができる。

ところで、変位と各部材の伸びの関係式を用いることにより、部材の伸び$\boldsymbol{\delta}$は変位$\mathbf{u}$の関数$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u})$と表現することが可能となり、未知変数を$\mathbf{u}$のみに集約したポテンシャルエネルギー最小化問題として再定式化することができる。すなわち、

find　$\mathbf{u}$, which

min　$$\boldsymbol{\Pi}_P(\mathbf{u})=\sum_{i=1}^{n}\Pi_{Pi}(\mathbf{u})-\mathbf{P}^T\mathbf{u} \tag{4}$$

sub.to　$$g_{Fj}(\mathbf{u})=P_j+\sum_{i=1}^{n}\overline{C}_{ji}(\mathbf{u})A_i\sigma_i(\mathbf{u})=0 \quad (j=1,\cdots,m) \tag{5}$$

ここに、g_{Fj}は各可動節点における力の釣合方程式、P_jは可動節点変成分jに作用する外力、$\overline{C}_{ji}$はi部材の軸力を全体座標系の自由度j方向力への変換マトリックスである。

本研究では、式(4),(5)の最小化問題を逐次二次計画法(SQP)を用いて、改良解が一定値に収束するまで解の改良を行っている。

3. 複合非線形トラスの最適設計法

本研究では、複合非線形挙動状態にあるトラス構造物の原最適設計問題の設計変数として、各部材の断面積$\mathbf{A}$を考慮し、各部材の応力度および各可動節点変位に関する制約条件$\mathbf{g}_\sigma,\mathbf{g}_u$のもとで、トラス構造物の全重量$\mathbf{W}$を最小化する原最適設計問題を考える。

次に式(4),(5)の複合非線形解析問題にラグランジュ関数を導入する。

$$L(\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\Pi}_p(\mathbf{u})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_{Fj}(\mathbf{u}) \tag{6}$$

ラグランジュ関数の停留点より次式の解析上満足すべき必要条件を導入する。

$$\frac{\partial L(\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda})}{\partial u_k}=\sum_{k=1}^{n}\left\{A_k l_k(\mathbf{u})\frac{\partial\alpha_k(\mathbf{u}^0)}{\partial u_i}+A_k\alpha_k(\mathbf{u})\frac{\partial l_k(\mathbf{u}^0)}{\partial u_i}\right\}-P_i$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial\overline{C}_{jk}(\mathbf{u}^0)}{\partial u_i}A_k\sigma_k(\mathbf{u})+\overline{C}_{jk}(\mathbf{u})A_k\frac{\partial\sigma_k(\mathbf{u}^0)}{\partial u_i}\right\}=0$$

$$(i=1,\cdots,m) \tag{7}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j}=\sum_{k=1}^{n}\overline{C}_{jk}(\mathbf{u})A_k\sigma_k(\mathbf{u})+P_j=0$$

$$(j=1,\cdots,m) \tag{8}$$

式(7),(8)を原最適設計問題に等号制約条件 g_i, g_j として付加し、さらに設計変数は断面積 **A** に加えて、可動節点変位 **u** およびラグランジュ乗数 **λ** をも独立変数として考慮することにより、解析上の必要条件を満足させつつ設計変数の改良を行う。したがって、**A**, **u**, **λ** を設計変数として考慮したトラス構造物の最小重量設計問題を、次式のように再定式化することができる。

find $\quad \mathbf{A},\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda}$, which

$$\text{min.}\quad \mathbf{W}(\mathbf{A},\mathbf{u})=\sum_{i=1}^{n}\rho_i A_i l_i(\mathbf{u}) \tag{9}$$

sub.to

$$g_i(\mathbf{A},\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda})=\sum_{k=1}^{n}\left\{A_k l_k(\mathbf{u})\frac{\partial\alpha_k(\mathbf{u}^0)}{\partial u_i}+A_k\alpha_k(\mathbf{u})\frac{\partial l_k(\mathbf{u}^0)}{\partial u_i}\right\}-P_i$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial\overline{C}_{jk}(\mathbf{u}^0)}{\partial u_i}A_k\sigma_k(\mathbf{u})+\overline{C}_{jk}(\mathbf{u})A_k\frac{\partial\sigma_k(\mathbf{u}^0)}{\partial u_i}\right\}=0$$

$$(i=1,\cdots,m) \tag{10}$$

$$g_j(\mathbf{A},\mathbf{u})=\sum_{k=1}^{n}\overline{C}_{jk}(\mathbf{u})A_k\sigma_k(\mathbf{u})+P_j=0 \quad (j=1,\cdots,m) \tag{11}$$

$$g_{\sigma k}(\mathbf{u})=|\sigma_k(\mathbf{u})|-\sigma_{ak}\le 0 \qquad (k=1,\cdots,n) \tag{12}$$

$$g_{ul}(\mathbf{u})=|u_l|-u_{al}\le 0 \qquad (l=1,\cdots,m) \tag{13}$$

$$A_i^L\le A_i\le A_i^U \qquad (i=1,\cdots,n)$$

ここに、ρ_i は部材 i の単位体積当りの重量である。また、σ_{ak}, u_{al} はそれぞれ部材 k の許容応力度および可動節点変位成分 l の許容変位である。A_i の肩文字 L および U はそれぞれ A_i の下限値および上限値を示す。

上で再定式化した最適設計問題において、目的関数および制約条件の **A**, **u**, **λ** に関する感度係数が容易に計算できることより、本研究では式(9)～(13)の線形近似最適設計問題を導入している。この場合感度係数は解析式を用いて容易に計算することができ、複雑かつ多大な計算量を必要とする複合非線形状態の挙動の感度係数の計算を行う必要はない。線形近似最適設計問題を勾配射影法を用いて解くことにより **A**, **u**, **λ** の改良解を求め、一定値に収束するまで **A**, **u**, **λ** の改良を繰返すことにより最適解を決定している。

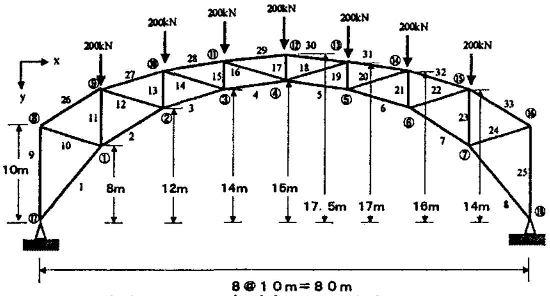

図-1　33部材アーチトラス

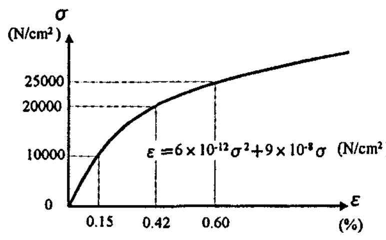

図-2　非線形材料

4. 設計例および考察

3.で述べた最適設計法の信頼性および有効性について検討を行うため図-1に示す33部材アーチトラスについて、すべての部材の材料を図-2に示す非線形材料とし、本研究で提案したポテンシャルエネルギー最小化による方法(PEM)とコンプリメンタリーエネルギー最小化による方法(CEM)との最適解の比較を行った結果を表-1に示す。なおこの設計例において、許容応力度 σ_a=20000N/cm² 許容変位 u_a=40cm と仮定している。最適解を得るための繰返し回数はPEMが25回、CEMが12回となっている。2つの方法より得られた最適な断面積の分布に多少の誤差が見られるが、トラス構造物の総重量である目的関数 **W** の相対誤差は0.221%とほぼ一致した解が得られている。

以上の考察より、最小ポテンシャルエネルギーの原理に基づき複合非線形トラス構造物の最適設計を能率的に行えることが明らかとなった。

表-1　PEMとCEMの最適解の比較

解法	PEM		CEM	
設計条件	許容応力度 σ_a =20000N/cm² 許容変位 u_a =40.0cm			
部材番号	断面積 (cm²)	応力度 (N/cm²)	断面積 (cm²)	応力度 (N/cm²)
1	80.9	14611	80.7	14855
2	81.3	12918	84.8	12791
3	57.1	11320	56.1	12509
4	7.0	19040	12.1	17156
9	5.9	6177	6.8	7126
10	9.7	6504	12.3	6723
11	19.9	17694	19.1	18225
12	20.8	17123	18.6	17990
13	23.0	14105	23.5	13728
14	49.7	10329	51.8	9543
15	19.5	10971	19.3	11084
16	36.8	6166	35.9	5810
17	17.3	6790	17.0	7228
26	10.5	6300	12.1	7203
27	14.7	19993	13.4	18823
28	58.7	13537	55.9	13137
29	105.0	9645	98.7	9479
W(N)	94307.8		94516.7	
u_{max}(cm)	39.6		39.8	
繰返し回数	25		12	
move limit	ξ =0.60		ξ =0.60	
activeな制約条件	応力・変位		変位	