

I-28 最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく 複合非線形トラス構造物の最適設計法

愛媛大学工学部 正員 ○谷脇 一弘
松山市役所 正員 依光 慶典

1. まえがき

材料の非線形および幾何学的非線形を考慮した複合非線形解析の分野では、変位法に基づく荷重増分法に基礎をおく種々の方法が提案されている。しかし、これらの解析手法と従来の最適設計法を組み合わせる複合非線形を考慮した構造物の最適設計を行う場合には、感度係数の計算に多大な計算量を要し、かつ変数の改良のために使用できる範囲も感度係数の計算時に用いた初期値の近傍の限られた範囲となることより、最適設計を行うことはきわめて困難となる。

そこで本研究では、これまでの研究でその有効性および効率性が明らかとなっている最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラス構造物の解析法および最適設計法の考え方を基本とし、複合非線形トラス構造物の複合非線形解析法および最適設計法に関する研究を行ったものである。

2. コンプリメンタリーエネルギー最小化による複合非線形解析法

複合非線形状態にある構造物の解析を行うためには、変形状態における力の釣合条件式および変位の適合条件を満足させつつコンプリメンタリーエネルギーの最小化を行う必要がある。

各部材軸力 N および各節点の変位量 u を考慮した変形状態におけるトラス構造物において、部材 i のコンプリメンタリーエネルギー $\Pi_{Ci}(N, u)$ は次式で表わされる。

$$\Pi_{Ci}(N, u) = \beta_i(N_i) A_i l_i(u) \quad (1)$$

ここに、 A_i および $l_i(u)$ はそれぞれの部材 i の断面積および変形後の部材長である。 $\beta_i(N_i)$ はコンプリメンタリーエネルギー密度である。

変形状態における力の釣合条件式 g_{Fj} は、次式により表すことができる。

$$g_{Fj}(N, u) = P_j + \sum_{i=1}^n C_{ji}(u) N_i = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (2)$$

ここに、 C_{ji} は軸力 N_i の可動節点成分 j への方向余弦、 P_j は可動節点成分 j に作用する外力である。

ところで、変位と各部材のひずみの関係式を用いることにより、軸力 N は変位 u の関数として $N(u)$ と表現することが可能となるため、未知変数を u のみに集約することができる。したがって、複合非線形解析問題を変形状態における力の釣合条件式のみを考慮し、コンプリメンタリーエネルギーを最小化する u を決定する問題として定式化することができる。すなわち、

$$\begin{aligned} &\text{find } u, \text{ which} \\ &\text{min. } \Pi_{Cu}(u) = \sum_{i=1}^n \Pi_{Ci}(u) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &\text{sub.to } g_{Fj}(u) = P_j + \sum_{i=1}^n C_{ji}(u) N_i(u) = 0 \\ &\quad (j=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (4)$$

3. 複合非線形トラスの最適設計法

本研究では、複合非線形挙動状態にあるトラス構造物の原最適設計問題の設計変数として、各部材の断面積 $A = [A_1, \dots, A_n]^T$ を考慮し、各部材の応力度および各可動節点変位に関する制約条件 g_σ, g_u のもとで、トラス構造物の全重量 W を最小化する最適設計問題を考える。

まず、式(3)、(4)の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(u, \lambda)$ を導入し、 $L(u, \lambda)$ の極値が満足すべき必要条件を次式のように誘導する。

$$\frac{\partial L(u, \lambda)}{\partial u_k} = \frac{\partial \Pi_{Cu}(u)}{\partial u_k} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_{Fj}(u)}{\partial u_k} = 0 \quad (k=1, \dots, m) \quad (5)$$

$$\frac{\partial L(u, \lambda)}{\partial \lambda_j} = g_{Fj}(u) = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (6)$$

本研究では、式(5)、(6)の解析上の必要条件式を応力度および変位の不等号制約条件に加えて等号制約条件として付加する。さらに、断面積 A に加えて、可動節点変位 u およびラグランジュ乗数 λ をも独立変数として考慮することにより、解析上の必要条件を満足させつつ設計変数の改良を行う。したがって、 A, u, λ を設計変数として考慮したトラス構造物の最小重量設計問題を次式のように再定式化することが

できる.

$$\begin{aligned} &\text{find} \quad \mathbf{A}, \mathbf{u}, \lambda, \text{ which} \\ &\text{min.} \quad \mathbf{W}(\mathbf{A}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i l_i(\mathbf{u}) \\ &\text{sub. to} \quad g_{Ck}(\mathbf{A}, \delta, \lambda) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \left(D_{ik} \varepsilon_i(\mathbf{u}) A_i l_i(\mathbf{u}^0) + \beta_i(\mathbf{u}^0) A_i \frac{\partial l_i}{\partial u_k} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial C_{ji}}{\partial u_k} \sigma_i(\mathbf{u}^0) A_i + C_{ji}(\mathbf{u}^0) A_i D_{ik} \right) = 0 \\ &\quad (k = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (8)$$

$$g_{ej}(\mathbf{A}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n C_{ji}(\mathbf{u}) \sigma_i(\mathbf{u}) A_i + P_j = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (9)$$

$$g_{\sigma}(\mathbf{A}, \mathbf{u}) = |\sigma_i(\mathbf{A}, \mathbf{u})| - \sigma_{ai} \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} g_{ui}(\mathbf{u}) &= |u_i| - u_{ai} \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\ A_i^L &\leq A_i \leq A_i^U \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{ここに, } D_{ik} = \frac{1}{l_i^0} \cdot \frac{\partial \sigma_i(\varepsilon_i^0)}{\partial \varepsilon_i} \cdot \frac{\partial l_i(\mathbf{u}^0)}{\partial u_k}$$

本研究では、目的関数および制約条件の $\mathbf{A}, \mathbf{u}, \lambda$ に関する感度係数が容易に計算できることより、式(7)~(11)の線形近似最適設計問題を導入している。この場合、感度係数は解析式を用いて容易に計算することができ、複雑かつ多大な計算量を必要とする複合非線形状態の挙動の感度係数の計算を行う必要はない。

上で展開した線形近似最適設計問題を解く方法として種々の方法が考えられるが、本研究では、アクティブとなる制約条件群のみに着目して効率的に設計変数の改良を行うことができる勾配射影法を用いて線形近似最適設計問題を解き $\Delta \mathbf{A}, \Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda$ を求めて

いる。2. で述べた方法により複合非線形解析を行い、正確な変位 $\mathbf{u}$ および軸力 $\mathbf{N}$ を求める。この解析により得られた正確な $\mathbf{u}$ および $\mathbf{N}$ より改良された $\mathbf{A}'$ および λ' を初期値 $\mathbf{u}^0, \mathbf{N}^0, \mathbf{A}^0, \lambda^0$ として再び線形近似最適設計問題を導入し、勾配射影法を用いて設計変数を改良する過程を全重量 $\mathbf{W}$ および $\mathbf{u}, \mathbf{N}, \mathbf{A}, \lambda$ が一定値に収束するまで繰り返すことにより最適解 $\mathbf{W}_{opt}$ および $\mathbf{A}_{opt}, \mathbf{u}_{opt}, \mathbf{N}_{opt}$ を決定することができる。

4. 設計例および考察

図-1 に示す 33 部材アーチトラスについて、図-2 に示す非線形材料を考慮し、各部材の許容応力度 σ_a を 20000 N/cm^2 、許容変位を $u_a = 40.0 \text{ cm}$ とし、幾何学的非線形を考慮した場合(複合非線形)および考慮しない場合(材料非線形)の最適解の比較結果を表-1 に示す。複合非線形の場合は 12 回、材料非線形の場合は 37 回と複合非線形の場合が能率的に最適解が得られている。最適解において、複合非線形の場合には変位が、材料非線形の場合には応力度および変位の制約条件がアクティブとなっている。最適断面積の分布は、14, 16, 28, 29 部材において、材料非線形の場合の断面積は複合非線形の場合の 54.6%~70.5% の小さい値を示しており過小評価となっている。また、材料非線形の場合の 27 部材の断面積は最小断面積となっている。目的関数の比較では、幾何学的非線形を考慮しない場合は、考慮した場合の 15.0% 小さい値を示している。

以上の検討結果より、提案した方法により、複合非線形トラス構造物の最適設計を能率的に行うことができることが明らかとなった。

表-1 複合非線形および材料非線形場合の最適解の比較

解法	考慮		考慮しない	
設計条件	許容応力度 $\sigma_a = 20000\text{N/cm}^2$ 許容変位 $u_a = 40.0\text{cm}$			
部材番号	断面積 (cm^2)	応力度 (N/cm^2)	断面積 (cm^2)	応力度 (N/cm^2)
1	80.7	14855	77.2	16392
2	84.8	12791	79.1	15515
3	56.1	12509	60.4	16095
4	12.1	17156	30.3	19880
9	6.8	7126	8.2	11060
10	12.3	6723	12.9	11929
11	19.1	18225	16.6	18413
12	18.6	17990	14.3	13322
13	23.5	13728	21.0	14374
14	51.8	9543	36.5	9858
15	19.3	11084	10.1	19852
16	35.9	5810	19.6	4290
17	17.0	7228	10.9	14756
26	12.1	7203	13.3	12205
27	13.4	18823	1.0	-
28	55.9	13137	37.6	10389
29	98.7	9479	65.0	7257
W(N)	94516.7		8032	
$u_{\max}(\text{cm})$	39.8		40.0	
繰返し回数	12		37	
move limit	$\xi = 0.60$		$\xi = 0.50$	
activeな 制約条件	応力		応力・変位	

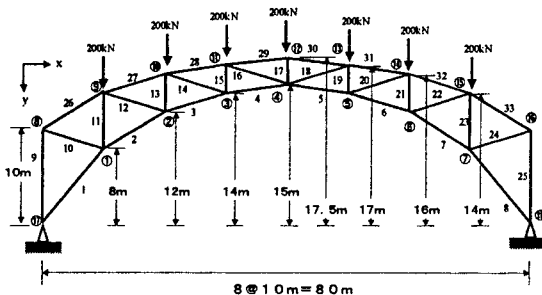


図-1 33 部材アーチトラス

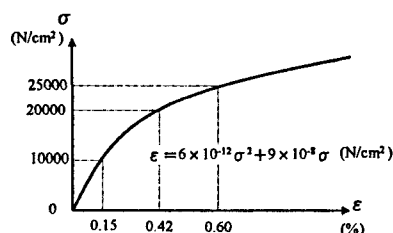


図-2 非線形材料