

1. はじめに

構造物の地震応答解析を行う場合、構造物の振動特性（1次の固有周期と減衰定数）を把握する必要がある。同定または逆解析の精度によって地震応答制御の効率や安全性が左右されるので、まず精度のよい構造物の振動特性を求めることのできる拡張 Kalman Filter を用いるアルゴリズムについて検討した。

2. Kalman Filter を用いた時間領域内での振動問題の逆解析

多質点系の振動方程式は、

$$M\ddot{u}_r + C\dot{u}_r + Ku_r = -M\ddot{z} \quad \dots\dots(1)$$

M :質量行列, $I^T = \{1, 1, 1, \dots\}$

K :剛性行列, T は転置を表す

C :減衰行列, $\ddot{z}$:地震加速度

u_r :相対変位ベクトル

$$\dot{x} = A_c x + B_c \ddot{z} \quad \dots\dots(2)$$

$$x^T = \{u_r, \dot{u}_r\}, B_c^T = \{0, -I^T\}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

E : $m \times m$ の単位行列, x は状態量を示す。

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d \ddot{z}_k \quad \dots\dots(3)$$

$$A_d = \exp(A_c \Delta t) = E + \Delta t A_c + \frac{(\Delta t)^2}{2!} A_c^2 + \dots\dots$$

$$B_d = \int_0^{\Delta t} \exp[A_c t] dt B_c \\ = \left(\Delta t E + \frac{(\Delta t)^2}{2!} A_c + \frac{(\Delta t)^3}{3!} A_c^2 + \dots\dots \right) B_c$$

2.1 Kalman Filter と振動問題

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d \ddot{z}_k + w_k \quad \dots\dots(4)$$

$$z_k = H x_k + v_k \quad \dots\dots(5)$$

$$E \left[\begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^T & v_1^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \delta_{kl} \quad \dots\dots(6)$$

$$x_{k+1/k} = A_d x_{k/k} + B_d \ddot{z}_k \quad \dots\dots(7)$$

$$P_{k+1/k} = A_d P_{k/k} A_d^T + Q \quad \dots\dots(8)$$

$$P_{k+1/k+1} = (P_{k+1/k}^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} \quad \dots\dots(9)$$

$$x_{k+1/k+1} = x_{k+1/k} + P_{k+1/k+1} H^T R^{-1} (z_{k+1} - H x_{k+1/k}) \quad \dots\dots(10)$$

2.2 拡張 Kalman Filter を用いた同定

$$x^T = \{u^T, \dot{u}^T, s^T\} \quad \dots\dots(11)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ -M^{-1}C\dot{u} - M^{-1}Ku - I\ddot{z}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C & \frac{\partial}{\partial s}(-M^{-1}C\dot{u} - M^{-1}Ku - I\ddot{z}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(13)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} E & \Delta t E & 0 \\ -\Delta t M^{-1}K & E - \Delta t M^{-1}C & \Delta t \frac{\partial}{\partial s}(-M^{-1}C\dot{u} - M^{-1}Ku - I\ddot{z}) \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \quad \dots\dots(14)$$

$$x_{k+1/k} = x_{k/k} + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(x) dt \quad \dots\dots(15)$$

3. 拡張 Kalman Filter を用いた解析方法と解析条件

3.1 線形 1 自由度振動系

線形自由度のモデルを図 1 に示し、運動方程式を示す。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{z}_0 \quad \dots\dots(16)$$

$$\omega^2 = k/m, h = c/(2\sqrt{mk}) \text{ を代入して}$$

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = -\ddot{z}_0 \quad \dots\dots(17)$$

$$x_1 = x, x_2 = \dot{x}, u = \ddot{z}_0$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2h\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} u \quad \dots\dots(18)$$

$$\dot{x}_t = A_1 x_t + B_1 u_t \quad \dots\dots(19)$$

(19)式を離散化すると、

$$x_{k+1} = A_2 x_k + B_2 u_{k+1} \quad \dots\dots(20)$$

$$A_2 = I + A_1 \Delta + \frac{1}{2!} A_1^2 \Delta^2 + \frac{1}{3!} A_1^3 \Delta^3 + \dots\dots$$

$$B_2 = \left[I + \frac{1}{2!} A_1 \Delta + \frac{1}{3!} A_1^2 \Delta^2 + \dots\dots \right] \Delta B_1$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ -\omega^2 \Delta & 1 - 2h\omega \Delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_k + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\Delta \end{Bmatrix} u_{k+1} \quad \dots\dots(21)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_k \quad \dots\dots(22)$$

3.2 1 自由度振動系の定式化

(17)式に対して $x_3 = h, x_4 = \omega$

ただし、 $\dot{x}_3 = 0, \dot{x}_4 = 0$ のとき

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2x_3 x_4 x_2 - x_4^2 x_1 - u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(23)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}_k \quad \dots\dots(24)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}_k \quad \dots\dots(25)$$

$$y_k = l(x_{t_k}, t_k) = -2x_3x_4x_2 - x_4^2x_1 \quad \dots\dots(26)$$

$$\phi[t_{k+1}, t_k; \hat{x}(t_k|t_k)] = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & 0 & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(27)$$

$$x_t = \hat{x}(t_k|t_k)$$

ただし、

$$\phi_{21} = -\Delta x_4^2$$

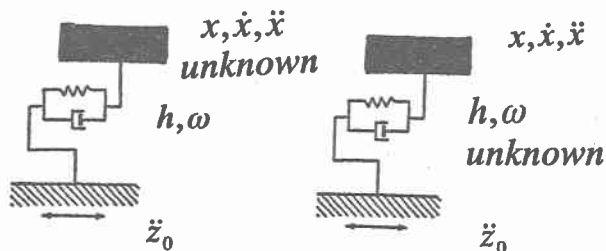
$$\phi_{22} = 1 - 2\Delta x_3x_4$$

$$\phi_{23} = -2\Delta x_2x_4$$

$$\phi_{24} = -2\Delta(x_2x_3 + x_1x_4)$$

4. 解析結果

解析ケースは表 1 に示したように 6 ケースを順解析、逆解析を行う。ここでは代表例として図 2, 3 にノースリッジと Izmit 地震を示す。同図より Kalmanfilter を用いると、ノースリッジ地震では構造物の固有値 $\{\omega = 3.39$ (0.54Hz), $h = 10\%$ }, Izmit 地震では固有値 $\{\omega = 1.82$ (0.3Hz), $h = 10\%$ } となり、構造物の動特性が求められる事が分かる。



(a) 順解析

(b) 逆解析

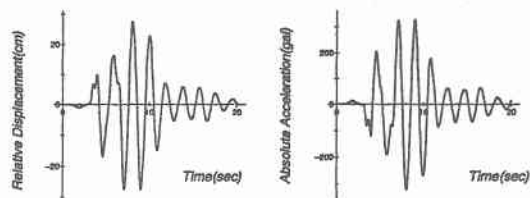
図 1 解析モデル

表 1 解析ケース

		f	ω	h
兵庫県南部地震	第1種地盤	1.5	9.425	0.06
	第2種地盤	0.5	3.14	0.08
	第3種地盤	0.2	1.257	0.1
ノースリッジ地震(EW)		0.54	3.39	0.1
Izmit地震		0.3	1.82	0.1
南海模倣地震		0.9	5.65	0.1

5. 参考文献

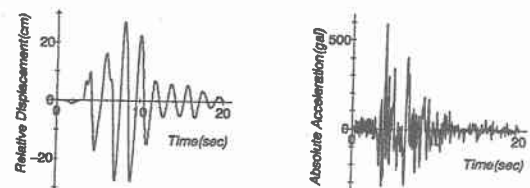
- 1) 篠塚正宣: 土木・建築における制御技術の現状, 計測と制御, vol.31, No.4, 1992.4
- 2) 吉川正昭: 都市大型重要構造物の地震時における振動制御に関する研究, 科研成果報告書(研究課題番号 08650665), 290 pages, 1993.3.
- 3) 斉藤悦郎: EK-WG I 法の開発と振動工学における同定問題への応用に関する研究, 武蔵工業大学学位論文, 1986.
- 4) 吉川正昭: 模型構造物の振動制御-制御スビルオーバーにより生じる現象-, 土木学会四国支部技術研究発表会公報要集, pp.40~41, 2000.5.
- 5) 久村富持: 制御システム論の基礎, 共立出版, p.35, 1988.



(a) Displacement Response

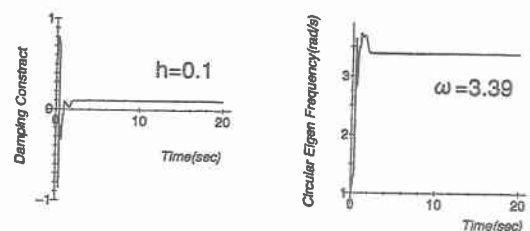
(b) Acceleration Response

(a) ノースリッジ順解析



(a) Input motion on the structure

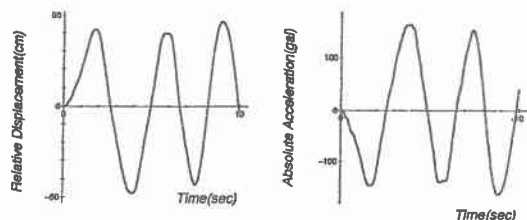
(b) Input Earthquake



(c) Result of Dynamic characteristics

(b) ノースリッジ逆解析

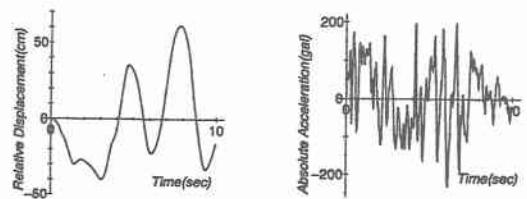
図 2 解析結果



(a) Displacement Response

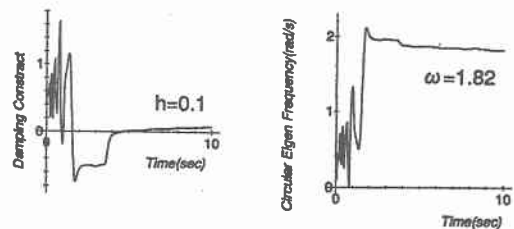
(b) Acceleration Response

(a) Izmit 順解析



(a) Input motion on the structure

(b) Input Earthquake



(c) Result of Dynamic characteristics

(b) Izmit 逆解析

図 3 解析結果