

I-5 エネルギー原理に基づくトラス構造物の複合非線形解析法

愛媛大学工学部 正 員 谷 協 一 弘 愛媛大学工学部 フェロー 大久保 禎二
鉄建建設(株) 正 員 〇松 友 啓 志 愛媛大学大学院 学生員 風 川 喜 彦

1. まえがき

近年、土木構造物や建築構造物の設計において、性能規定化の考えが導入され、従来の材料や構造物の弾性限度、疲労限界などに関する設計条件に加えて、地震動や風荷重などにより構造物の挙動が非線形領域に入っても、適切なねばりと限界耐力を保有するように保有水平耐力や残留変位に対する検討を行うことが要求されており、構造物の非線形挙動あるいは弾塑性挙動を正確に解析できる解析理論、さらに種々の限界荷重状態における構造物の限界耐力に対しても、合理的な設計を能率的に行うことができる設計法を確立する事がきわめて重要な課題となっている。このような観点から、著者らはこれまでに最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく材料の非線形性を考慮した骨組構造物の非線形解析法および最適設計法に関する研究を行ってきたが、本研究では、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づき材料の非線形性のみならず構造物の幾何学的非線形性をも考慮したトラス構造物の複合非線形解析を行う方法に関する研究を行い、本研究で提案した方法の有効性、信頼性を明らかにするものである。

2. 最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づくトラス構造物の複合非線形解析法

最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づきトラス構造物の材料の非線形性および幾何学的非線形性を考慮した複合非線形解析法は以下の通りである。

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理より外荷重 $\mathbf{P}$ を受けるトラス構造物の材料非線形解析を行い、各部材のコンプリメンタリーエネルギーを求め、コンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数を導入し、ラグランジュ乗数 λ より各節点の変位 $\mathbf{d}$ を計算する。得られた変位 $\mathbf{d}$ より各部材のひずみ $\varepsilon_p(\mathbf{d})$ を計算し、 $\varepsilon_p(\mathbf{d})$ を用いて応力度-ひずみ関係より応力度 $\sigma_p(\mathbf{d})$ を求め、変形形状に対する各部材の軸力 $\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{d})$ を求める。形状の変化を考慮することにより力の釣合方程式が不成立となり、変位 $\mathbf{d}$ を用いて回転マトリックス $\mathbf{C}$ を $\mathbf{C}'$ と修正し、不平衡力 $\Delta\mathbf{P}$ を $\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{C}'\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{d})$ として求める。不平衡力 $\Delta\mathbf{P}$ 、回転マトリックス $\mathbf{C}'$ および $\Delta\mathbf{P}$ により生ずる各部材の軸力 $\Delta\mathbf{N}$ を用いて各可動節点における力の釣合条件式 $\mathbf{g} = \Delta\mathbf{P} - \mathbf{C}'\Delta\mathbf{N}(\mathbf{d})$ を作成する。上で計算した応力度およびひずみの点が原点となるように各部材の応力-ひずみ関係を図-1 に示すように原点を $0'$ とする $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ 関係に修正し、 $\Delta\mathbf{P}$ による部材 i のコンプリメンタリーエネルギー $\bar{\Pi}_{ci}(\bar{\mathbf{N}}_i)$ を次式により求める。

$$\bar{\Pi}_{ci}(\Delta\mathbf{N}_i) = \int_{\bar{\varepsilon}_i} \bar{\beta}_i dV_i = \bar{\beta}_i A_i \bar{l}_i \quad (1)$$

ここに、 V_i, A_i および $\bar{l}_i$ はそれぞれの部材 i の体積、断面積および部材長である。 $\bar{\beta}_i$ は図-1 の斜線で示すコンプリメンタリーエネルギー密度である。

上で述べた $\Delta\mathbf{P}$ による部材 i のコンプリメンタリーエネルギーおよび $\Delta\mathbf{P}$ による各可動節点における力の釣合条件式を考慮して、トラス構造物の $\Delta\mathbf{P}$ による軸力の増分 $\Delta\mathbf{N}$ を求めるための全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題は、次のように定式化することができる。

$$\text{Find} \quad \Delta\mathbf{N}, \quad \text{which} \quad \text{minimize} \quad \bar{\Pi}_{C'}(\Delta\mathbf{N}) = \sum_{i=1}^n \bar{\Pi}_{ci}(\Delta\mathbf{N}_i) \quad (2)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{g}_j = \Delta\mathbf{P} - \mathbf{C}'\Delta\mathbf{N}(\mathbf{d}) = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (3)$$

ここに、 n は部材数、 m は可動節点の成分の数を示す。

このコンプリメンタリーエネルギー最小化過程において、応力度-ひずみ関係は、図-1 に示す原点を $0'$ とする $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ 関係を用いる。上式を解き、各部材のコンプリメンタリーエネルギーを求め、式(2)、(3)のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数を導入し、ラグランジュ乗数 $\Delta\lambda$ より変位の変化量 $\Delta\mathbf{d}$ を求める。得られた総変位 $\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}$ に対するひずみ $\varepsilon_p(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$ を計算し、応力度-ひずみ関係より応力度 $\sigma_p(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$ を求め、変形形状に対する各部材の軸力 $\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$ を求める。変位 $\mathbf{d}$ を $\mathbf{d} = \mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}$ と修正し、 $\mathbf{d}$ を用いて $\mathbf{C}'$ の修正、 $\Delta\mathbf{P}$ の計算、式(2)、(3)によるコンプリメンタリーエネルギー最小化問題の作成の過程を、不平衡力 $\Delta\mathbf{P}$ が微小値かつ各可動節点変位の平均移動距離が一定値に収束するまで改良を繰り返すことにより複合非線形を考慮したトラス構造物の真の部材力 $\mathbf{N}^*$ を求めることができる。

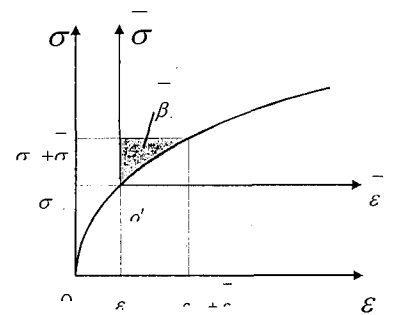


図-1 応力度-ひずみ関係の修正

3. 解析例および考察

上で述べた解析法により、図-2(a)に示す非線形材料よりなる図-3に示す2部材トラスの複合非線形解析を行った解析過程について述べる。

- ① 外力 P を受けるトラスのコンプリメンタリーエネルギー最小化問題を解き、変位 d を求めた結果 $d = 212.7\text{cm}$ (鉛直変位) が得られた。
- ② 得られた変位 d を考慮した部材力 $\bar{N}(d)$ は次の通りである。

$$\bar{N}_1(d) = \bar{N}_2(d) = 120.73\text{tf}$$

- ③修正した回転マトリックス C' および部材力 $\bar{N}(d)$ を用いて不釣合力 (不平衡力) を求めると、 $\Delta P = P - C'\bar{N}(d) = -7.983\text{tf}$ となる。

- ④応力度-ひずみ関係を修正し、図-4に示す ΔP を受けるトラスのコンプリメンタリーエネルギー最小化問題を解き各部材のコンプリメンタリーエネルギーを求める。

- ⑤④で作成したコンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数より変位 Δd を求め、総変位 $d + \Delta d$ 、部材力 $N(d + \Delta d)$ を求めると次の通りになる。

$$d + \Delta d = 210.7\text{cm}, \quad \bar{N}_1(d + \Delta d) = \bar{N}_2(d + \Delta d) = 120.08\text{tf}$$

- ⑥変位 d を $d + \Delta d$ と修正し、不平衡力 ΔP が微小値となるまで③~⑥の計算過程を繰り返した結果を表-1に示す。最終的に③~⑥の過程を 67 回繰り返すことにより表-1に示す真の解が得られた。

次に、図-2(b)に示す非線形材料よりなる図-5に示す 39 部材ワーレントラスについて、提案した方法により得られた変位と荷重増分法により得られた変位とを比較した結果を表-2に示す。表-2より明らかなごとく節点変位は完全に一致している。また、線形解析、幾何学的非線形解析、複合非線形解析により得られた変位を比較すると、変位 Y_{11} に着目すると、線形解析では 9.336cm、非線形解析では 9.370cm、複合非線形解析では 31.381cm となっており、線形解析の変位量に対して、幾何学的非線形解析では 1.004 倍、複合非線形解析では 3.361 倍と変位量が変化している。

以上の考察により、本研究で提案した方法によりトラス構造物の材料非線形のみならず幾何学的非線形をも考慮した複合非線形解析を行うことができることが明らかとなった。また荷重増分法により真の解を求めるためには、荷重を分割し、各増分荷重に対する解析において部材剛性マトリックスおよび幾何剛性マトリックスを修正する操作を多くの回数を行わなければならないことに対して、本研究で提案しているトラス構造物の複合非線形解析法は荷重の分割を行う必要がなく、アルゴリズムが単純となり、より能率的な解析法であることが明らかになった。

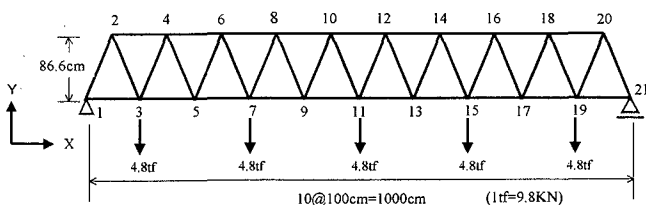


図-5 39 部材ワーレントラス

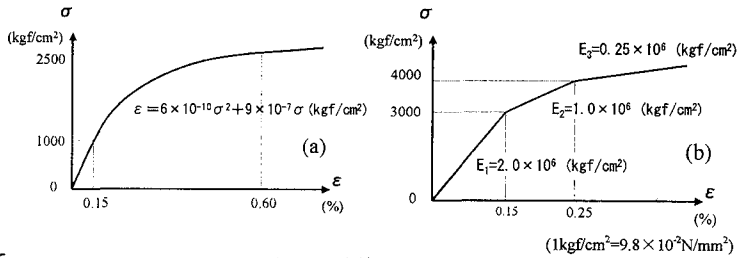


図-2 非線形材料(a),(b)

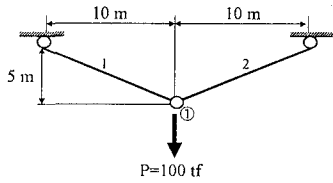


図-3 2部材トラス

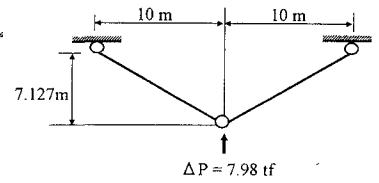


図-4 不平衡力 ΔP

表-1 2 部材トラスの ΔP , d および $\bar{N}(d)$ の改良過程

ITE	ΔP (tf)	d (cm)	$\bar{N}$ (tf)
1	-7.983	212.7	120.73
2	-39.383	210.7	120.08
10	-6.416	148.3	97.60
20	-1.688	139.8	94.30
30	-0.535	137.7	93.47
40	-0.178	137.1	93.22
50	-0.060	136.9	93.13
60	-0.020	136.8	93.10
67 (真の解)	0.010	136.8	93.10

表-2 提案した方法および荷重増分法による 39 部材ワーレントラスの節点変位の比較

幾何学的形状 の変化	考慮しない	考慮する		考慮する	
		幾何学的非線形解析		複合非線形解析	
		荷重増分法	提案した方法	荷重増分法	提案した方法
節点変位 (cm)	線形解析法				
X_0	2.356	2.341	2.341	7.249	7.250
$-Y_2$	1.520	1.557	1.557	4.780	4.780
X_0	0.069	0.027	0.027	0.315	0.315
$-Y_3$	3.000	3.009	3.010	8.879	8.880
X_4	2.217	2.163	2.163	6.734	6.734
$-Y_4$	4.336	4.376	4.376	13.452	13.412
X_6	0.249	0.176	0.176	-0.449	-0.449
$-Y_6$	5.588	5.587	5.587	17.310	17.312
X_8	1.995	1.914	1.914	5.994	5.994
$-Y_8$	6.672	6.711	6.712	21.467	21.470
X_{10}	0.513	0.420	0.420	0.079	0.079
$-Y_{10}$	7.624	7.650	7.650	24.603	24.714
X_{12}	1.691	1.595	1.595	4.725	4.725
$-Y_{12}$	8.336	8.373	8.374	27.604	27.607
X_{14}	0.831	0.732	0.732	1.182	1.182
$-Y_{14}$	8.864	8.896	8.896	29.580	29.583
X_{16}	1.358	1.259	1.259	3.368	3.368
$-Y_{16}$	9.200	9.236	9.236	30.919	30.923
X_{18}	1.178	1.078	1.078	2.807	2.808
$-Y_{18}$	9.336	9.369	9.370	31.378	31.381
X_{20}	0.898	0.898	0.898	1.847	1.847
$-Y_{20}$	9.200	9.236	9.236	30.919	30.923
X_{22}	1.524	1.425	1.425	4.033	4.033
$-Y_{22}$	8.864	8.896	8.896	29.580	29.583
X_{24}	0.685	0.582	0.582	0.480	0.480
$-Y_{24}$	8.336	8.373	8.374	27.604	27.607
X_{26}	1.843	1.737	1.737	5.136	5.136
$-Y_{26}$	8.672	8.650	8.650	24.702	24.714
X_{28}	0.360	0.243	0.243	-0.779	-0.779
$-Y_{28}$	8.672	8.711	8.712	17.310	17.312
X_{30}	2.106	1.981	1.981	5.664	5.664
$-Y_{30}$	5.587	5.587	5.587	17.310	17.312
X_{32}	0.139	-0.006	-0.006	-1.519	-1.519
$-Y_{32}$	4.336	4.376	4.376	15.452	15.454
X_{34}	2.286	2.129	2.130	5.530	5.530
$-Y_{34}$	3.000	3.010	3.010	8.879	8.880
X_{36}	0.000	-0.184	-0.184	-2.034	-2.035
$-Y_{36}$	1.520	1.557	1.557	4.780	4.780
X_{38}	2.356	2.157	2.157	5.215	5.215