

愛媛大学大学院 学生員 ○川下 誠二 愛媛大学工学部 フェロー会員 大久保 禎二
愛媛大学工学部 正会員 谷脇 一弘 榊 森 本 組 横山 直人

1. まえがき

著者らはこれまでに、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを力の釣合条件式のもとで最小化することにより材料の非線形性を考慮した構造物の解析を行う方法について研究を行ってきた。これまでの研究においては、材料の応力-ひずみ関係において、ひずみが増大しても応力が減少しない、つまり、ひずみ軟化を生じないものとして、その挙動の範囲内での解析法について研究を行ってきた。本研究では、これまでに開発してきた解析法をさらに発展させ、部材がひずみ軟化を生じた場合の構造物の非線形解析法について基礎的な研究を行うとともに、変位法の荷重増分法による解との比較検討を行った結果について述べるものである。

2. 全コンプリメンタリーエネルギー最小化によるトラス構造物の非線形解析法

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によれば、各部材力 N の中で、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_C(N)$ を最小にする部材力 N が真の部材力 N^* となり、その解析問題は次のような全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題として定式化される。

$$\begin{aligned} & \text{find } N, \quad \text{which} \\ & \text{minimize } \Pi_C(N) = \sum_{i=1}^n \Pi_{Ci}(N_i) \quad (1) \\ & \text{subject to } g = P - CN = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

ここに、 $g = [g_1(N), \dots, g_m(N)]^T$ は各可動節点における力の釣合方程式、 $P = [P_1, \dots, P_m]^T$ は各可動節点に作用する外力、 $C(m \times n)$ は各部材力 N の P 方向への変換マトリックスである。

上記の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題を解くため、まず目的関数を二次形式に、制約条件を一次形式に近似し近似の二次計画問題を導入し、これを勾配射影法の手法を用いて解き $\bar{N}_r$ の改良解 $\bar{N}_r + \Delta \bar{N}_r$ を求める。次に目的関数の二次の項の係数マトリックスを BFGS 公式を用いて修正し、改良解 $\bar{N}_r + \Delta \bar{N}_r$ に対する新たな近似二次計画問題を作成する。このようにして式(1), (2)の近似二次計画問題を逐次修正しながら勾配射影法を用いて部材力の改良を繰り返すことにより真の部材力 N^* を決定することができる。

3. ひずみ軟化を考慮した非線形解析法の定式化

図-1 に示すひずみ軟化を伴う非線形材料よりなるトラス構造物を、2 で述べた全コンプリメンタリーエネルギー最小化の方法を用いて解く場合、構造物のある部材のひずみあるいは応力度がひずみ軟化を示す域にある状態では、その部材のコンプリメンタリーエネルギーは、図-1 の(A)(B)に示すコンプリメンタリーエネルギー密度を考慮して求めなければならない。また、式(2)の釣合条件式は、ひずみ軟化を生じている部材では応力度の減少を考慮して設定しなければならない。そこで本研究では、荷重の増加により各部材がひずみ軟化点に達する度ごとに式(1)(2)の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題を修正し、増分荷重 $\Delta \bar{P}$ による増分部材力 $\Delta \bar{N}$ を求める問題として次のように定式化し、新たな部材がひずみ軟化を生ずるまでの $\Delta \bar{P}$ および $\Delta \bar{N}$ を求めた。

$$\begin{aligned} & \text{find } \Delta \bar{N}, \quad \text{which} \\ & \text{minimize } \bar{\Pi}_C(\Delta \bar{N}) = \sum_{i \in S_s} \bar{\Pi}_{Ci}(\Delta \bar{N}_i) + \sum_{j \in S_{NS}} \bar{\Pi}_{Cj}(\Delta \bar{N}_j) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{subject to } g(\bar{N}) = \Delta \bar{P} + C \Delta \bar{N} = 0 \quad (4)$$

$$|\Delta \bar{\sigma}_i| \leq 0 \quad i \in S_s \quad (5)$$

$$|\sigma_j + \Delta \sigma_j| \leq |\sigma_u| \quad j \in S_{NS} \quad (6)$$

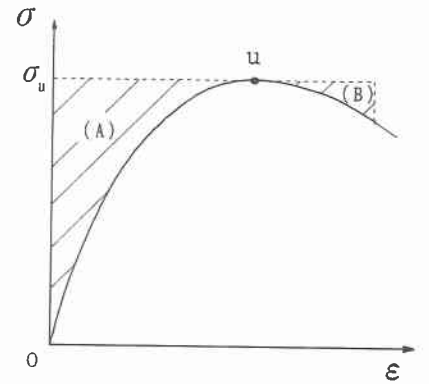


図-1 ひずみ軟化を伴う材料の応力度-ひずみ関係
およびコンプリメンタリーエネルギー密度

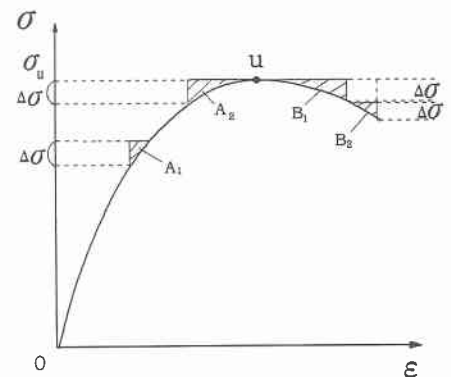


図-2 $\Delta \bar{P}$ による部材のコンプリメンタリーエネルギー密度

上式において、 S_s はひずみ軟化を生じている部材の集合、 S_{NS} はひずみ軟化を生じていない部材の集合であり、 S_s に属する部材の $\Pi_{C_i}(\Delta \bar{N}_i)$ は図-2 の B_1 あるいは B_2 、 S_{NS} に属する部材の $\Pi_{C_i}(\Delta \bar{N}_i)$ は図-2 の A_1 あるいは A_2 より求める。また、式(5)はひずみ軟化を生じている部材 i の増分荷重 $\Delta \bar{P}$ による増分応力度 $\Delta \sigma_i$ は減少すべきことを、また式(6)はひずみ軟化を生じていない部材 j の増分荷重 $\Delta \bar{P}$ による応力度の増加量 $\Delta \sigma_j$ は最大応力度(図-2 の u 点)を越えてはならないことを規制する制約条件であり、 σ_j および $\Delta \sigma_j$ は、それぞれ増分荷重 $\Delta \bar{P}$ がかかる前および $\Delta \bar{P}$ による部材 j の応力度、 σ_u は最大応力度(図-2 の u 点)である。

4. 解析例および考察

上述の解析法の信頼性を検討するため、図-2 に示す3部材トラスの解析を行った。変位法(荷重増分法)による解との比較を容易にするため、材料の応力度-ひずみ関係として図-3 に示す折れ線の関係仮定した。本論文の解析法および変位法(荷重増分法)による計算結果の比較を表-1 に示す。このトラスではまず $P = 206300 \text{ (kgf)}$ で部材2の応力度が最大応力度 $\sigma_u = 8829 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ と等しくなり、部材1および部材3の応力度は $\sigma_{1,3} = 8344.5 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ となった。次に微少増分荷重による各部材の応力度の増分量あるいは減少量を求め、部材1および3の応力度 $\sigma_{1,3} + \Delta \sigma_{1,3}$ が $\sigma_u = 8829 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ を越えない増分荷重 $\Delta \bar{P}$ を求めると $\Delta \bar{P} = 5709 \text{ (kgf)}$ を得、 $P + \Delta \bar{P} = 212009 \text{ (kgf)}$ において部材1および3の応力度が最大応力度 $\sigma_u = 8829 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ と等しくなり、部材2の応力度はひずみ軟化により $113.9 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ 減少し、 $8715.2 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ となった。この計算結果を変位法(荷重増分法)による解と比較すると、その相対誤差は0.003~0.001%となり、全て同一の解が得られていることが明らかとなった。

5. 結論

解析例で示したごとく、本論文で提案している最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づくひずみ軟化を考慮した非線形解析法の解析結果と変位法(荷重増分法)による解析結果はよく一致しており、本研究で提案した解析法により、ひずみ軟化を考慮したトラス構造物の非線形極限耐力の解析を行うことができることが明らかとなった。今後、本論文で提案した解析法により、より能率的かつ自動的に解析が行えるように解析アルゴリズムの改良を行うとともに、より大規模な構造物の非線形問題に適用し、本研究で述べた方法の有効性を明らかにしていく予定である。また、ひずみ軟化を考慮する場合には各部材のひずみが大きくなるため、幾何学的な非線形性をも併せて考慮できるように解析法を拡張する必要がある。

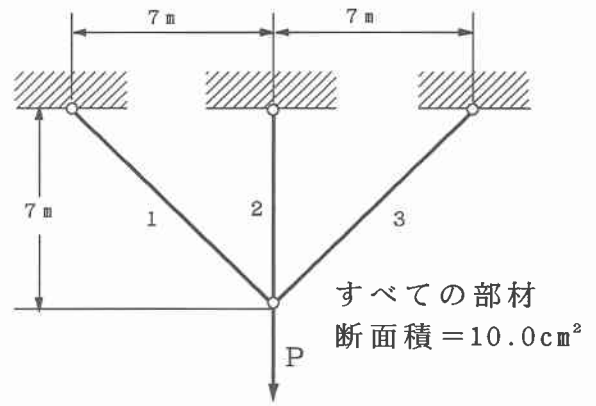


図-3 3部材トラス

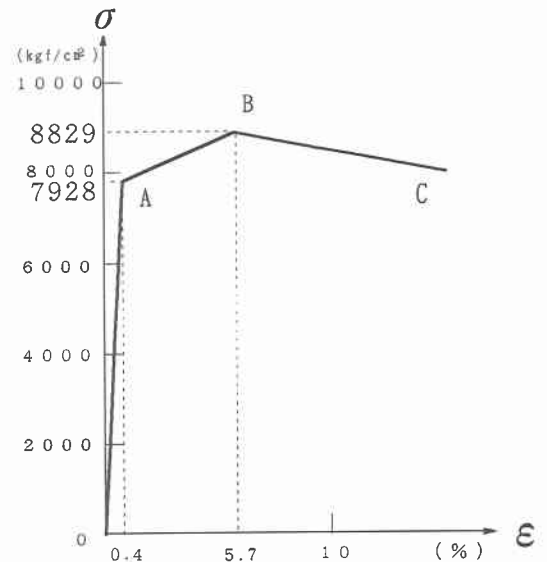


図-4 計算例に用いたひずみ軟化を伴う非線形材料の応力度-ひずみ関係

表-1 最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づく解析法および変位法による解の比較

	部材番号	エネルギー法	変位法	相対誤差(%) $\left \frac{\sigma_e - \sigma_s}{\sigma_e}\right \times 100$
		応力度 σ_e (kgf/cm ²)	応力度 σ_s (kgf/cm ²)	
$P = 206300(kgf)$	1	8344.5	8344.8	0.004
	2	8829.1	8829.0	0.001
	3	8344.5	8344.8	0.004
$\Delta \bar{P} = 5709(kgf)$	1	484.2	484.2	0.000
	2	-113.9	-113.9	0.000
	3	484.2	484.2	0.000
$P + \Delta \bar{P} = 212009(kgf)$	1	8828.7	8829.0	0.003
	2	8715.2	8715.1	0.002
	3	8828.7	8829.0	0.003

参考文献) たとえば、大久保・和多田：土木学会論文集 第374号/I-6, pp. 427~436, 1986. 10.

大久保・和多田・西村：土木学会論文集 第519号/I-32, pp. 57~66, 1995. 7.