

榎芙蓉調査設計事務所 正 ○野上 武志
愛媛大学大学院 学 川下 誠二
愛媛大学工学部 フェロー 大久保 禎二

1. まえがき

本研究は、構造物の幾何学的非線形性を考慮した最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラス構造物の非線形解析法に関する研究成果を基本にして、幾何学的非線形性を考慮したトラス構造物の最適設計問題を、応力度や変位などの挙動に関する感度係数を用いることなく統一的かつ能率的に解く方法について研究を行ったものである。本研究では、まず応力度－ひずみ関係が線形である材料を用いて幾何学的形状の変化が解に与える影響について考察を行うとともに、本研究で述べた最適設計法による解と、挙動の感度係数を用いて双対法により求めた最適解との比較を行い、本研究で述べた最適設計法の信頼性、能率性などについて検討を行った。

2. 原最適設計問題の定式化

線形・非線形挙動状態にあるトラス構造物の原最適設計問題において、設計変数として各部材の断面積 A を考慮し、挙動に関する制約条件として応力度および変位の制約条件 $\mathbf{g}_\sigma, \mathbf{g}_\lambda$ を考慮すると、トラス構造物の全重量あるいは全製作費 W を最小化する原最適設計問題を次のように定式化することができる。

$$\text{find } A = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T, \quad \text{which minimize } W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i l_i \quad (1)$$

$$\text{subject to } g_{\sigma k}(A) = \sigma_{kmax}(A) - \sigma_{\sigma k} \leq 0 \quad (k=1, \dots, n), \quad g_{\lambda l}(A) = \lambda_l(A) - \lambda_{\lambda l} \leq 0 \quad (l=1, \dots, m), \quad A_i^L \leq A_i \leq A_i^U \quad (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

ここに、 ρ_i, l_i は部材 i の単位体積当たりの重量あるいは製作費、および部材長、 U, L は上限値および下限値を示す。また n, m は部材数および可動節点変位成分の数、 $\sigma_{kmax}, \sigma_{\sigma k}$ は部材 k の最大応力度および許容応力度を示す。 $\lambda_l, \lambda_{\lambda l}$ は可動節点変位成分 l の変位量および許容変位量である。

3. エネルギー原理に基づくトラス構造物の幾何学的非線形性を考慮した解析問題の解法

構造物の全コンプリメンタリーエネルギー最小化によるトラス構造物の非線形解析法によれば、トラス構造物の各部材の軸力 N を決定する解析問題は、各可動節点における力の釣合条件 $\mathbf{g}$ のもとで、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_c(N)$ を最小化する問題として次式で定式化することができる。

$$\text{find } N = [N_1, N_2, \dots, N_n]^T, \quad \text{which minimize } \Pi_c(N) = \sum_{i=1}^n \Pi_{ci}(N_i) \quad (3), \quad \text{subject to } \mathbf{g} = \mathbf{P} - \mathbf{C}\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (4)$$

ここに、 $\Pi_{ci}(N_i)$ は部材 i のコンプリメンタリーエネルギー、 $\mathbf{g} = [g_1(N), \dots, g_m(N)]^T$ は各可動節点における力の釣合方程式、 $\mathbf{P} = [P_1, \dots, P_m]^T$ は各可動節点に作用する外力、 $\mathbf{C}(m \times n)$ は N の P 方向への変換マトリックスである。

本研究では、幾何学的非線形性をも考慮したトラス構造物の解析を行うため、まず式(3)(4)で定式化された解析問題の目的関数 $\Pi_c(N)$ を ΔN の二次形式で、線形制約条件を ΔN の線形関数として表現し、 N の改良のための変化量 ΔN を決定する近似二次計画問題を導入する。これを勾配射影法の手法を用いて解き ΔN を求める。さらに各可動節点変位 λ を次式により求め、

$$\lambda = (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C}^T \nabla \Pi_c(\Delta N) = (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C}^T \varepsilon_i l_i \quad (5)$$

この λ を用いて各可動節点の座標を修正し、修正された座標を用いて変換マトリックス $\mathbf{C}$ を修正する。次に修正された変換マトリックス $\bar{\mathbf{C}}$ を用いて全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題を修正し再び解析を行う。このようにして各部材の部材力、および各可動節点変位がそれぞれ一定値に収束するまで解析を繰り返すことにより、幾何学的非線形性を考慮したトラス構造物の真の部材力および可動節点変位を求めることができる。

4. 解析上の必要条件の導入

式(3)および(4)で表されるエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(\sigma, \lambda)$ を導入することにより解析上満足すべき必要条件として次式を得る。

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma_i} = \varepsilon_i(\sigma_i) \bar{l}_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{C}_{ji} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (6)$$

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^n \bar{C}_{ji} \sigma_i A_i - P_j = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (7)$$

5. 最適設計問題の再定式化および A, σ, λ の改良

4. で求めた解析上満足すべき必要条件を原最適設計問題の制約条件に追加し、さらに A, σ, λ を独立変数として取り扱うことにより、トラス構造物の全重量または全製作費 $W(A)$ を最小化する最適設計問題を次のように再定式化することができる。

Find A, σ, λ , which minimize $W(A) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i \bar{l}_i \quad (8)$

subject to $g_i(\sigma, \lambda) = \varepsilon_i(\sigma_i) \bar{l}_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{C}_{ji} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (9)$

$$g_j(A, \sigma) = \sum_{i=1}^n \bar{C}_{ji} \sigma_i A_i - P_j = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (10)$$

$$g_{\sigma k}(A, \sigma) = \sigma_{k \max}(A) - \sigma_{\sigma k} \leq 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (11)$$

$$g_{\lambda l}(A, \lambda) = \lambda_l(A) - \lambda_{al} \leq 0 \quad (l=1, \dots, m) \quad (12)$$

$$A_i^L \leq A_i \leq A_i^U \quad (i=1, \dots, n) \quad (13)$$

上記の再定式化された最適設計問題を $\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda$ に関して線形近似し、勾配射影法を用いて $\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda$ の値を決定する。

A, σ, λ はそれぞれ $\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda$ の値を用いて改良される。上記の最適設計問題の再定式化、線形近似、勾配射影法による解の改良を $W(A), A, \sigma, \lambda$ が一定値に収束するまで繰り返すことにより、最終的な最適解 A^*, σ^*, λ^* を決定することができる。

6. 最適設計例および考察

本研究で提案した最適設計法を、ヤング率 $E=2.0 \times 10^6 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ の線形材料よりなる図-1に示す41部材アーチトラスに適用し、幾何学的な形状の変化を考慮した場合および最適解と考慮しない場合の最適解の比較を行った結果を表-1に示す。

各断面積の相対誤差は最大で21.90%、また総重量の相対誤差は4.32%となっている。またヤング率 $E=2.0 \times 10^6 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ の線形材料を用いて図-2の31部材2径間連続トラスにおいて本研究で述べた方法による解(GPM)と挙動の感度係数を用いて双対法により求めた解(Dual-S)との比較を行った結果を表-2に示す。この最適設計問題では、各部材の最適な応力度はいずれの場合も許容応力度(3000kgf/cm²)と等しくなっており、目的関数の相対誤差は0.163%であり、同一の最適解が得られている。しかし、最適解を決定する計算時間に関して、GPMはDual-Sの55.6%と効率的に最適解を得ている。このことより、本研究で提案した最適設計法は、挙動の感度係数を用いる方法を比較して効率的に最適解を決定できることが明らかとなった。

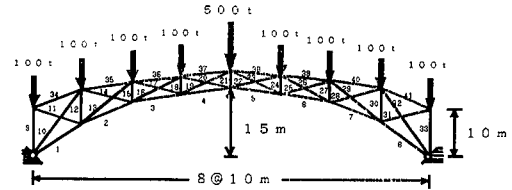


図-1 41部材アーチトラス

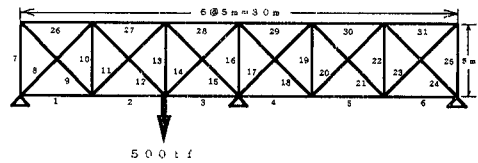


図-2 31部材2径間連続トラス

表-1 幾何学的形状の変化を考慮した場合の最適解と考慮しない場合の最適解の比較 (41部材アーチトラス (図-1))

幾何学的形状の変化	考慮する場合		考慮しない場合	
	変位制限 $\Delta u(\text{cm})$		100	
部材番号	応力制限 $\sigma(\text{kgf/cm}^2)$		3000	
	断面積 (cm^2)	応力度 (kgf/cm^2)	断面積 (cm^2)	応力度 (kgf/cm^2)
1	365.7	2974	359.2	3000
2	318.2	2969	312.0	2996
4	132.6	2996	108.8	3001
6	94.3	2947	99.1	2984
10	1.0	—	1.0	—
12	71.8	2070	70.8	2009
13	79.9	2984	76.2	2995
15	1.0	—	1.0	—
17	22.5	1375	19.4	1209
18	79.6	1546	75.4	1486
20	72.3	2663	71.4	2667
21	1.0	—	1.0	—
23	226.6	2981	209.3	2995
26	225.0	2981	214.6	2996
28	1.0	—	1.0	—
31	80.3	2821	77.3	2703
33	22.0	1500	18.2	1257
35	79.7	2789	76.9	2679
37	265.8	2974	254.4	2995
39	1.0	—	1.0	—
41	81.7	2929	78.7	2804
W (kgf)	36727.3		35206.3	
$\lambda_{\max}(\text{cm})$	31.2		30.2	
CUP TIME (sec.) ¹⁾	18.4		13.8	
IT E ²⁾	33		29	
相対誤差(%) ³⁾	—		4.32	

- 1) DEC3000/300による計算時間
2) 最終解を得るために要した繰り返し回数
3) 幾何学的形状の変化を考慮した場合の総重量と、形状の変化を考慮しない場合の総重量の相対誤差の絶対値
4) 幾何学的形状の変化を考慮した場合の断面積と、形状の変化を考慮しない場合の断面積の相対誤差の絶対値

表-2 GPM, Dual-Sによる幾何学非線形性を考慮した最適解の比較 (31部材2径間連続トラス (図-2))

解法	GPM		Dual-S	
	変位制限 $\Delta u(\text{cm})$		100	
部材番号	応力制限 $\sigma(\text{kgf/cm}^2)$		3000	
	断面積 (cm^2)	応力度 (kgf/cm^2)	断面積 (cm^2)	応力度 (kgf/cm^2)
1	54.8	3000	54.7	3000
2	55.9	2998	55.7	3000
3	109.8	2998	55.5	3000
4	1.0	—	1.0	—
5	1.0	—	1.0	—
6	1.0	—	1.0	—
7	1.0	—	1.0	—
8	77.4	2996	77.1	3000
9	1.0	—	1.0	—
10	1.0	—	1.0	—
12	77.4	2997	77.2	3000
13	109.9	3000	56.1	3004
14	1.0	—	78.0	2995
15	155.8	2998	79.5	3004
16	1.0	—	55.2	2996
18	1.0	—	1.0	—
24	1.0	—	1.0	—
27	110.2	2997	109.8	3000
28	1.0	—	53.9	2995
30	1.0	—	1.0	—
31	1.0	—	1.0	—
W (kgf)	3558.1		3552.3	
$\lambda_{\max}(\text{cm})$	4.0		4.0	
CUP TIME (sec.) ¹⁾	6.5 (0.556)		11.7 (1.000)	
IT E ²⁾	29		12	
相対誤差(%) ³⁾	—		0.163	

- 1) DEC3000/300による計算時間
2) 最終解を得るために要した繰り返し回数
3) GPMにより解いた場合の総重量と、Dual-Sにより解いた場合の総重量の相対誤差の絶対値