

愛媛大学大学院 学 ○渡邊 誠晶 愛媛大学工学部 正 谷脇 一弘
愛媛大学工学部 フェロー 大久保禎二 愛媛大学大学院 学 好竹 亮介

1. まえがき

本研究は地震力を受ける多質点構造物の時刻歴応答の感度解析法として、多質点構造物の運動方程式を設計パラメータに関して微分することにより、解析的かつ効率的に挙動の感度解析を行う方法について基礎的研究を行ったものである。計算例として、5質点線形モデルにおいて兵庫県南部地震の波形を入力し、部材の減衰が変化したことによる変位の感度に関して、本研究で述べる解析的な感度解析法および差分法を用いて得られた解の比較を行い、本研究の有効性および特徴について考察を述べる。

2. 直接積分法による線形時刻歴応答解析法

多質点減衰系の運動方程式は図1より

$$[M]\{\ddot{x}\}_t + [C]\{\dot{x}\}_t + [K]\{x\}_t = -\ddot{y}_t [M]\{1\} \quad (1)$$

である。 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ はそれぞれ系の質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックスであり、 $\{x\}_t$ は時刻 t における相対変位ベクトルであり、 $\ddot{y}_t$ は時刻 t における系に加わる加速度である。 $\{1\}$ は要素1の列ベクトルである。本研究では、式(1)の解法として Wilson θ 法を用いた。この方法では、時刻 $t + \theta\Delta t$ において、運動方程式

$$[M]\{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t} + [C]\{\dot{x}\}_{t+\theta\Delta t} + [K]\{x\}_{t+\theta\Delta t} = -\ddot{y}_{t+\theta\Delta t} [M]\{1\} \quad (2)$$

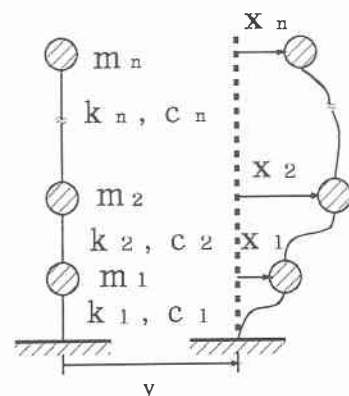


図1 多質点モデル

が成り立つものとし時刻 $t \sim t + \theta\Delta t$ の間で、全質点の相対応答加速度および地動加速度が線形に変化するものとする、 t を原点とする区間の時間を τ ($0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$) としたとき時刻 τ での応答加速度式は次式により与えられる。

$$\{\ddot{x}(\tau)\} = \frac{\{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t} - \{\ddot{x}\}_t}{\theta\Delta t} \cdot \tau + \{\ddot{x}\}_t \quad (3)$$

式(3)を τ に関して積分した式に $\tau = \theta\Delta t$ および $\tau = \Delta t$ とおくとそれぞれ式(4)および式(5)を得る。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{x}\}_{t+\theta\Delta t} &= \{\dot{x}\}_t + \left(\{\ddot{x}\}_t + \{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t} \right) \frac{\theta\Delta t}{2} \\ \{x\}_{t+\theta\Delta t} &= \{x\}_t + \{\dot{x}\}_t (\theta\Delta t) + \left(2\{\ddot{x}\}_t + \{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t} \right) \frac{(\theta\Delta t)^2}{6} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{x}\}_{t+\Delta t} &= \{\dot{x}\}_t + \left(\frac{1}{2\theta} \{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t} + \left(1 - \frac{1}{2\theta} \right) \{\ddot{x}\}_t \right) \Delta t \\ \{x\}_{t+\Delta t} &= \{x\}_t + \{\dot{x}\}_t \Delta t + \left(\frac{1}{3\theta} \{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t} + \left(1 - \frac{1}{3\theta} \right) \{\ddot{x}\}_t \right) \frac{(\Delta t)^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

次に、式(4)より $\{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t}$ および $\{\dot{x}\}_{t+\theta\Delta t}$ は次式より得ることができる。

$$\{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} (\{x\}_{t+\theta\Delta t} - \{x\}_t) - \frac{6}{\theta\Delta t} \{\dot{x}\}_t - 2\{\ddot{x}\}_t \quad (6)$$

$$\{\dot{x}\}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t} (\{x\}_{t+\theta\Delta t} - \{x\}_t) - 2\{\dot{x}\}_t - \frac{\theta\Delta t}{2} \{\ddot{x}\}_t \quad (7)$$

ここで、加速度を $\ddot{y}_{t+\theta\Delta t} = (1-\theta)\ddot{y}_t + \theta\ddot{y}_{t+\Delta t}$ と表現し、 $\ddot{y}_{t+\theta\Delta t}$ 、式(6)および式(7)を式(2)に代入すれば、未知の $\{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t}$ に関する方程式

$$\begin{aligned} & \left(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} [M] + \frac{3}{\theta\Delta t} [C] + [K] \right) \{x\}_{t+\theta\Delta t} \\ &= -((1-\theta)\ddot{y}_t + \theta\ddot{y}_{t+\Delta t}) [M]\{1\} + [M] \left(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \{x\}_t + \frac{6}{\theta\Delta t} \{\dot{x}\}_t + 2\{\ddot{x}\}_t \right) + [C] \left(\frac{3}{\theta\Delta t} \{x\}_t + 2\{\dot{x}\}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} \{\ddot{x}\}_t \right) \end{aligned} \quad (8)$$

が得られ、これを解くことにより $\{x\}_{t+\theta\Delta t}$ が求められる。

式(3)において $\tau = \Delta t$ とした式に式(6)および式(7)の $\{\ddot{x}\}_{t+\theta\Delta t}$ の計算式を代入することにより、 $\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}$ が $\{x\}_{t+\theta\Delta t}$ によって表現され、この結果を式(5)に代入すれば、時刻 $t + \Delta t$ における各質点の相対応答加速度、相対応答速度および相対応答変位が次式により得られる。

$$\left. \begin{aligned} \{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} &= \frac{6}{\theta(\theta\Delta t)^2} (\{x\}_{t+\theta\Delta t} - \{x\}_t) - \frac{6}{\theta^2\Delta t} \{\dot{x}\}_t + (1 - \frac{3}{\theta}) \{\ddot{x}\}_t \\ \{\dot{x}\}_{t+\Delta t} &= \{\dot{x}\}_t + (\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} + \{\ddot{x}\}_t) \frac{\Delta t}{2} \\ \{x\}_{t+\Delta t} &= \{x\}_t + \{\dot{x}\}_t \Delta t + (\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} + 2\{\ddot{x}\}_t) \frac{(\Delta t)^2}{6} \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

上式における $\{\ddot{x}\}_t$ 、 $\{\dot{x}\}_t$ および $\{x\}_t$ は、すでに前ステップで計算済みの既知量であるから、最初にこれらの初期値を与えれば、全応答量が逐次計算できる。

3. 感度解析法

式(1)を振動パラメータ d_i で偏微分すると、次式を得る。

$$\frac{\partial [M]}{\partial d_i} \{\ddot{x}\}_t + [M] \frac{\partial \{\ddot{x}\}_t}{\partial d_i} + \frac{\partial [C]}{\partial d_i} \{\dot{x}\}_t + [C] \frac{\partial \{\dot{x}\}_t}{\partial d_i} + \frac{\partial [K]}{\partial d_i} \{x\}_t + [K] \frac{\partial \{x\}_t}{\partial d_i} = \frac{\partial F_t}{\partial d_i} \tag{10}$$

F_t : 外力項

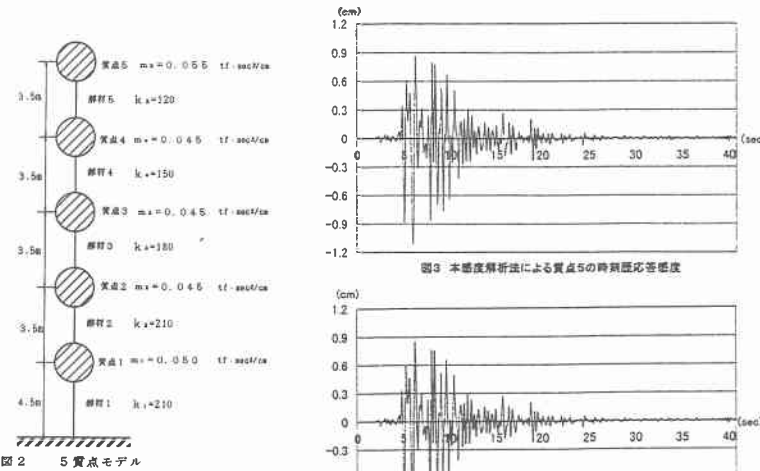
式(10)を変形してまとめると式(11)が得られる。

$$[M] \frac{\partial \{\ddot{x}\}_t}{\partial d_i} + [C] \frac{\partial \{\dot{x}\}_t}{\partial d_i} + [K] \frac{\partial \{x\}_t}{\partial d_i} = \frac{\partial F_t}{\partial d_i} - \frac{\partial [M]}{\partial d_i} \{\ddot{x}\}_t - \frac{\partial [C]}{\partial d_i} \{\dot{x}\}_t - \frac{\partial [K]}{\partial d_i} \{x\}_t \tag{11}$$

上式は、右辺を外力項と考えることで、運動方程式における変位、速度、加速度の項が、パラメータ d の微小変化に対する、変位、速度、加速度の変化量の項として表されている。すなわち、式(11)を上で述べた Wilson θ 法で解くことにより、振動パラメータの変化に関する変位、速度、加速度の感度を直接求めることができる。

4. 感度解析例および考察

本研究では、計算例として図2に示す5質点のモデルに兵庫県南部地震の波形を入力し、部材1の減衰定数が変化したことによる質点5の変位の時刻歴応答感度を、本感度解析法と差分法により求めた。質点5における本感度解析法による変位の時刻歴応答感度を図3に示す。この場合の最大応答感度は時刻5.98秒において-1.1150cmとなっている。また差分法による質点5の変位の時刻歴応答感度を図4に示す。この場合の最大応答感度は時刻



5.98 秒において-1.1050cm となっている。さらに、本感度解析法および差分法による質点5の変位の感度解析結果の誤差を表1に示す。この表より明らかなごとく最大誤差は2.37%となっている。これまでの計算例で述べたごとく、本研究で開発した感度解析法による解析結果は、差分法による解析結果と比較してよく一致している。また本感度解析法においては、外力項のみを変更することにより、全く同一の解析アルゴリズムを用いて、きわめて単純に計算が行うことができる。さらに Wilson θ 法において必要となる時刻 $t + \theta\Delta t$ における式(7)の左辺の逆行列の計算は、実際の地震波を用いた時刻歴応答解析において既に計算されており再度計算する必要がなく効率的に時刻歴応答の感度解析を行うことができる。

表1 質点5の各時刻における変位の感度

時刻 (sec)	本感度解析法 (cm)	差分法 (cm)	誤差 (%)
4.48	0.0715	0.0699	2.29
5.06	-0.8880	-0.8740	1.60
5.98	-1.1150	-1.1050	0.90
6.26	0.8649	0.8510	1.63
7.86	-0.8630	-0.8430	2.37
9.64	0.6714	0.6667	2.24