

実験モード解析法を用いた構造物の振動特性の同定に関する基礎的研究

愛媛大学工学部 フェロー会員 大久保 禎二
愛媛大学工学部 学生員 ○渡邊 誠晶

愛媛大学工学部 正会員 谷脇 一弘
日特建設㈱ 仲野 文雄

1. まえがき

構造物の固有振動数、固有ベクトル、固有モードなどの構造物特有の振動モード特性を求めることは構造物の振動に対する安全性を知る上できわめて重要なことであり、近年、実験にもとづき構造物の振動モード特性を同定する実験モード解析法が開発され実用化されている。本研究は、実験モード解析における固有振動数を同定する曲線適合法としてこれまでにその有効性および信頼性が明らかとなっている偏分反復法を用いて構造物の固有振動数を同定する方法について基礎的研究を行い、単純な構造物の固有振動数の同定を行った実験例について述べるものである。

2. 多自由度系の周波数応答関数

多自由度を有する構造物の運動方程式は、質量マトリックス $[M]$ 、減衰マトリックス $[C]$ 、剛性マトリックス $[K]$ 、および荷重項 $\{f\}$ を用いて次のように表される。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

基準座標 ξ と変位との関係 $\{x\} = \sum_{r=1}^N \xi_r \{\phi_r\}$ 、および固有モードの一般直行性を考慮して上式を書き換えれば

$$m_r \ddot{\xi}_r + c_r \dot{\xi}_r + k_r \xi_r = \phi_{rp} F_p e^{i\omega t} \quad (r=1, \dots, N) \quad (2)$$

ここに、 m_r ： r 次のモード質量、 c_r ： r 次のモード減衰係数、 k_r ： r 次のモード剛性、 ϕ_{rp} ： r 次の固有ベクトル $\{\phi_r\}$ の p 行目の項、 $F_p e^{i\omega t}$ ：点 p に作用する角振動数 ω で振幅 F の調和加振力、 N ：固有値の数
式(2)を ξ_r について解き、基準座標と変位との関係式を考慮して変位 $\{x\}$ は次式により与えられる。

$$\{x\} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{rp} F_p}{-m_r \omega^2 + i c_r \omega + k_r} \{\phi_r\} e^{i\omega t} \quad (3)$$

上式において点 j の応答 x_j に着目し、 $x_j = X_j(\omega) e^{i\omega t}$ とおけば $X_j(\omega)$ は次式により与えられる。

$$X_j(\omega) = \left(\sum_{r=1}^N \frac{\phi_{rp} \phi_{rj}}{-m_r \omega^2 + i c_r \omega + k_r} \right) F_p \quad (4)$$

ここで、不減衰固有角振動数 Ω_r を導入し、 $\frac{m_r}{k_r} = \frac{1}{\Omega_r^2}$ 、 $\frac{c_r}{k_r} = 2\zeta_r \frac{1}{\Omega_r}$ の関係式を考慮し、さらに、 $\beta_r = \omega / \Omega_r$ 、 $K_r = k_r / (\phi_{rp} \phi_{rj})$ の仮定を用いると、多自由度系の周波数応答関数 $L(\omega) = X_j(\omega) / F_p$ は次のように表される。

$$L(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{-\beta_r^2 \Omega_r^2 / K_r}{1 - (\omega / \Omega_r)^2 + 2i\zeta_r (\omega / \Omega_r)} = \sum_{r=1}^N \frac{-\beta_r^2 \Omega_r^2 / K_r}{1 - \beta_r^2 + 2i\zeta_r \beta_r} \quad \text{ここに、}\zeta_r\text{：}r\text{ 次のモード減衰比} \quad (5)$$

対象周波数領域以外の固有モードを省略した場合の周波数応答関数への影響を近似項 C および D を用いて表し、対象周波数内に n 個の固有モードが存在するものとして周波数応答関数を書き換えれば次式を得る。

$$L(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{-\beta_r^2 \Omega_r^2 / K_r}{1 - \beta_r^2 + 2i\zeta_r \beta_r} - C - \omega^2 D \quad \text{ここに、}C、D\text{は定数} \quad (6)$$

3. 偏分反復法を用いた固有振動数の同定

供試体の点 l をインパルスハンマーにて打撃した場合の測定点 j の周波数応答関数 $L_j^l(\omega)$ は、角振動数 ω の関数として、次のように表現できる。

$$L_j^l(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{-\beta_r^2 \Omega_r^2 / K_r}{1 - \beta_r^2 + 2i\zeta_r \beta_r} - C - \omega^2 D \quad (j=1, \dots, m) \quad \text{ここに、}m\text{：測定点の数} \quad (7)$$

ここで、 $\phi_{rl} \phi_{rj} = P_r$ とおけば $\frac{1}{K_r} = \frac{P_r}{\Omega_r^2}$ となり、これを用いて周波数応答関数を書き換えれば次式を得る。

$$L_j^I(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{-\omega^2 P_r}{\Omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \Omega_r} - C - \omega^2 D \quad (j=1, \dots, m) \quad (8)$$

未知項 Ω_r 、 P_r 、 ζ_r ($r=1, \dots, n$)、 C および D をまとめて $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_{3n+2}]^T$ とし、上式をテーラー展開の一次項までを用いて線形近似すると次式を得る。

$$\bar{L}_j^I(\omega, \gamma) \cong L_j^I(\omega, \gamma) + \sum_{h=1}^{3n+2} \frac{\partial L_j^I}{\partial \gamma_h}(\omega, \gamma) \cdot \Delta \gamma_h \quad (j=1, \dots, m) \quad (9)$$

ここで、周波数応答関数の実験値 A_j と理論値 $\bar{L}_j^I$ を実部と虚部に分けて表現すると次式となる。

$$A_j = A(\omega) = A_{jR} + iA_{jI} \quad , \quad \bar{L}_j^I = \bar{L}(\omega) = \bar{L}_{jR} + i\bar{L}_{jI} \quad (j=1, \dots, m) \quad (10)$$

偏分反復法では実験値と理論値の誤差の大きさの自乗和の総和 λ を最小とするように未知数を決定する。

$$\lambda = \sum_{j=1}^m |A_j - \bar{L}_j^I|^2 = \sum_{j=1}^m \left\{ (A_{jR} - \bar{L}_{jR})^2 + (A_{jI} - \bar{L}_{jI})^2 \right\} \rightarrow \min \quad (11)$$

式(11)を最小とする必要条件は次式となる。

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \Delta \gamma_h} = 2 \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{\partial L_{jR}}{\partial \Delta \gamma_h} (\bar{L}_{jR} - A_{jR}) + \frac{\partial L_{jI}}{\partial \Delta \gamma_h} (\bar{L}_{jI} - A_{jI}) \right\} = 0 \quad (h=1, \dots, 3n+2) \quad (12)$$

式(12)の連立方程式を解いて得られる $\Delta \gamma_h$ を用いて γ_h を次式により改良する。

$$\gamma_h^{(i+1)} = \gamma_h^{(i)} + \Delta \gamma_h \quad (h=1, \dots, 3n+2) \quad (13)$$

新たな改良解 $\gamma_h^{(i+1)}$ を用いて近似式の $\bar{L}_j^I$ を導入し、式(12)を解き、式(13)により γ_h を改良することを繰り返すことにより、最終的な未知数を決定することができる。構造物の固有振動数は Ω_j を用いて推定することができる。

4. 実験例および考察

本研究では図-1 に示す分布質量のみおよび集中質量をも有する鋼製長方形板(平板A, B)の固有振動数の同定を行った。実験方法としては、図-2 に示すようにインパルスハンマーにて任意点を加振した場合の12測定点それぞれの周波数応答関数を収録し、得られた各測定点の周波数応答関数を用いて偏分反復法により固有振動数の同定を行った。また、本研究では、得られた固有振動数の信頼性を検討するため、理論式より求めた固有振動数およびFEM解析より得られた値との比較を行った。平板Aの1次、2次、3次のモードの固有振動数の比較を表-1 に示す。表-1 より明らか

ごとく、平板Aの実験値は、最大6.03%理論値より小さな値となっている。平板Aにおいてインパルスハンマーの加振点を1, 4, 5, 8, 9, 12とそれぞれ変化させた場合の得られた1次、2次、3次の固有振動数の比較結果を表-2 に示す。表-2 より明らかごとく、いずれの場合も同一の固有振動数が得られ、インパルスハンマーの打撃位置の違いは固有振動数の同定に影響を与えないことが明らかとなった。さらに、平板Bの場合の1次のモードの固有振動数の実験値、理論値およびFEM解析による解との比較を表-3 に示す。実験値は最大13.53%理論値より小さな値となっているが、本研究の方法により構造物の固有振動数を比較的容易に推定できることが明らかとなった。

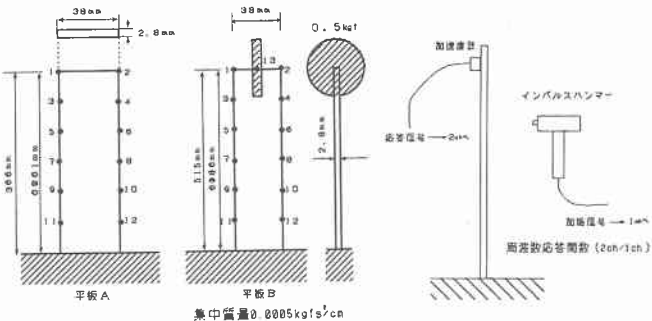


図-1 供試体 図-2 実験概要

表 1 平板Aの固有振動数の実験値、理論値およびFEM解析による解との比較

モード	実験値(Hz)①	理論値(Hz)②	FEM(Hz)③	①/②×100(%)	①/③×100(%)
1	1626	1729	1663	9404	9778
2	10182	10835	10509	9397	9671
3	30540	30337	30951	10067	9867

表 2 平板Aの打撃位置を変えた場合の1次、2次、3次の固有振動数の比較

加振位置	1次の固有振動数 (Hz)	2次の固有振動数 (Hz)	3次の固有振動数 (Hz)
1	16261	10230	29885
4	16260	10224	30916
5	16262	10277	30926
8	16261	10228	30995
9	16259	10182	30541
12	16258	10165	30918

表 3 平板Bの固有振動数の実験値、理論値およびFEM解析による解との比較(重さ0.5kg)

モード	実験値(Hz)①	理論値(Hz)②	FEM(Hz)③	①/②×100(%)	①/③×100(%)
1	345	399	398	8647	8668