

エネルギー原理に基づくトラス構造物の複合非線形解析法に関する基礎的考察

愛媛大学工学部 フェロー会員 大久保 禎二 積水ハウス(株) 正会員 上野 浩司
愛媛大学大学院 学会員 〇川下 誠二

1. まえがき

本研究は、これまで著者の一人によって研究開発されてきた最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づき、材料の応力度－ひずみ関係の非線形性のみならず、構造物の幾何学的な非線形性をも考慮した複合非線形解析法について基礎的な考察を行ったものである。本研究では、まず、荷重を分割し、幾何学的形状の変化をも考慮しながらトラス構造物の部材力の解析を行う複合非線形解析法について述べ、次に、荷重の分割数が解に与える影響、幾何学的形状の変化が解に与える影響などについて考察を行った。さらに、33部材アーチトラスにおいて、応力度－ひずみ関係が線形である材料を用いた場合の幾何学的形状の変化が解に与える影響について、本解析法による解と変位法による解との比較を行い、本解析法の妥当性を検討した。

2. エネルギー原理に基づく複合非線形解析法

一般的に先行荷重 $\sum_{i=1}^{r-1} \bar{P}_i$ につづいて増分荷重 $\bar{P}_r$ が载荷した場合の $\bar{P}_r$ による複合非線形解析法について考える。参考文献1) より、先行荷重 $\sum_{i=1}^{r-1} \bar{P}_i$ につづいて载荷される増分荷重 $\bar{P}_r$ による材料の非線形性のみを考慮したトラス構造物の各部材に作用する軸力 $\bar{N}_r$ および各自由節点の変位 $\bar{\lambda}_r$ を求めるために用いられる部材 i のコンプリメンタリーエネルギー $\bar{\Pi}_{Ci}(\bar{N}_r)$ は、図-1 に示す各部材の応力度－ひずみ曲線において先行荷重により生じている応力度 $\sigma_{P_{r-1,i}}$ およびひずみ $\varepsilon_{P_{r-1,i}}$ の点 O' を新たな原点として計算し、増分荷重 $\bar{P}_r$ のみを考慮した力の釣合方程式のもとで構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを最小化することにより正確に求められることが明らかとなっている。ところで、トラス構造物の節点変位の変化量をも考慮して複合非線形解析を行う場合には、増分荷重 $\bar{P}_r$ による各可動節点変位も考慮し、各自由節点における力の釣合方程式を求めなければならない。このためには、まず先行荷重により生じている節点変位 $\bar{\lambda}_{r-1}$ を考慮して、各節点の座標および各部材の方向余弦 $\bar{C}_r$ を修正し、 $\bar{P}_r$ により生ずる各節点の変位 $\bar{\lambda}_r$ を求める。つづいて、この節点変位 $\bar{\lambda}_r$ をも先行荷重による各節点変位 $\bar{\lambda}_{r-1}$ に加え、再度余弦方向を修正する。このようなトラス形状の修正およびそれに伴う方向余弦の修正を $\bar{P}_r$ による節点変位 $\bar{\lambda}_r$ および部材力 $\bar{N}_r$ が一定値に収束するまでくり返すことにより、増分荷重 $\bar{P}_r$ による部材力 $\bar{N}_r$ および節点変位 $\bar{\lambda}_r$ を決定することができる。よって、トラス構造物の $\bar{P}_r$ による軸力 $\bar{N}_r$ を求めるための全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題は、各部材の軸力の変化量 $\bar{N}_r$ を未知変数として次のように定式化することができる。

$$\begin{aligned} &\text{find} \quad \bar{N}_r, \quad \text{which} \\ &\text{minimize} \quad \bar{\Pi}_C(\bar{N}_r) = \sum_{i=1}^n \bar{\Pi}_{Ci}(\bar{N}_r) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad g(\bar{N}_r) = \bar{P}_r - \bar{C}_r \bar{N}_r = 0 \quad (2)$$

ここに、 $g(\bar{N}_r) = [g_1(\bar{N}_r), \dots, g_m(\bar{N}_r)]^T$ は各可動節点における力の釣合方程式、 $\bar{P}_r = [\bar{P}_{1r}, \dots, \bar{P}_{mr}]^T$ は各可動節点に作用する外力、 $\bar{C}_r (m \times n)$ は $\bar{N}_r$ の $\bar{P}_r$ 方向への変換マトリックス、 m は可動節点変位の自由度である。

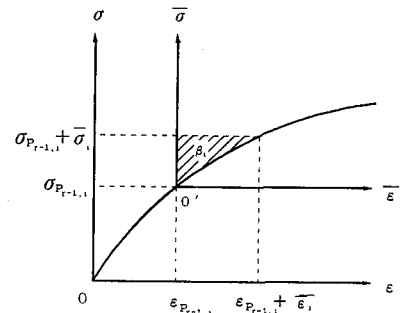


図-1 増分荷重に対するコンプリメンタリーエネルギー密度

本研究では、上記の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題を解くために、まず目的関数を二次形式に、また制約条件を一次形式に近似し近似二次計画問題を導入し、これを勾配射影法の手法を用いて解き $\bar{N}_r$ の改良解 $\bar{N}_r + \Delta \bar{N}_r$ を求める。次に目的関数の二次の項の係数マトリックスを B F G S 公式を用いて修正し、改良解 $\bar{N}_r + \Delta \bar{N}_r$ に対する新たな近似二次計画問題を作成する。このようにして逐次、近似二次計画問題を修正しながら S Q P の手法を用いて、解の改良を繰り返すことにより真の部材力 N^* を決定している。

3. 解析例

図-2 (a) に示す材料を用いて、図-3 に示す 3,15,21,33 部材トラスを有するトラス構造物について荷重の分割数を種々変化させ、分割数が解の精度に及ぼす影響について考察を行った。その結果、3,15,21 部材トラスにおいては幾何学的形状の変化を考慮する場合、荷重の分割数を 1,2,...,10 と多くするにしたがい解は一定値に収束して行くが、分割数の変化による構造物の挙動の変化量は 0.0%~3.7% 程度であり、分割数が解の精度に与える影響はわずかであった。一方、33 部材トラスでは分割数の変化による構造物の挙動の変化量は 2.4%~13.5% 程度と大きくなっており、トラスの構造形式により幾何学的形状の変化が解に及ぼす影響が大きく変化することが明らかとなった。また、本研究で提案した解析法の信頼性および有効性を検討するため、図-2 (b) に示す材料を用いて図-4 に示す 33 部材アーチトラスにおいて、応力度-ひずみ関係が線形の場合の幾何学的形状の変化が解に与える影響について、本解析法による解と変位法による解との比較を行った。その結果を表-1 に示す。本研究の解析法により得られた複合線形解析解と、変位法により得られた複合線形解析解とが、ほぼ完全に一致しており、また、材料の応力度-ひずみ曲線が線形である場合の計算時間が 0.4(sec), 0.3(sec) とほぼ等しいことから、本研究の方法の妥当性、汎用性および非線形材料の場合の解析の能率性などが明らかである。

4. 結 論

上記の解析例より明らかのように、本研究で提案した方法によりトラス構造物の材料の非線形性のみならず幾何学的形状の変化をも考慮した複合非線形解析が正確に、また統一的かつ能率的に行えることが明らかとなった。また、構造形式によっては、幾何学的形状の変化が解に及ぼす影響が 2.7%~25.8% 程度現れる場合もあり、幾何学的形状の変化をも考慮して非線形解析を行うことの重要性を明らかにした。

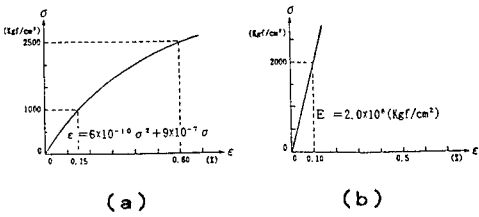


図-2 解析に用いた材料の応力度-ひずみ関係

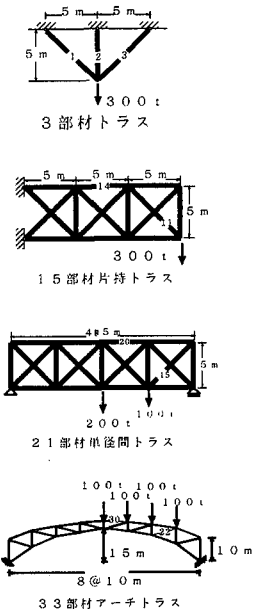


図 3 解析モデル

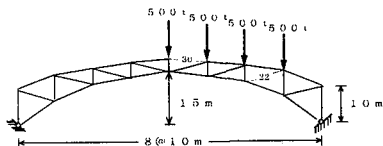


図-4 33 部材アーチトラス

表-1 幾何学的形状の変化を考慮した場合と考慮しない場合の解と変位法による解との比較 (33 部材アーチトラス, 断面積 A=200cm²) (材料図-2 (b))

幾何学的形状の変化	考慮する場合	考慮しない場合	変位法 1)	相対誤差 A 2)	相対誤差 B 3)
荷重分割数	1	1	1	(%)	(%)
応力度 (kgf/cm ²)					
σ ₁	9430.19	9049.74	9500.43	0.739	4.744
σ ₂	13045.46	12149.50	13203.87	1.200	7.985
σ ₃	14158.97	12891.98	14413.82	1.768	10.558
σ ₄	9624.51	8838.25	9910.31	2.884	10.818
σ ₅	5213.93	3724.10	5021.72	3.828	25.840
σ ₆	5195.02	5418.05	5278.15	1.575	2.651
σ ₇	2937.73	2528.33	2965.30	0.930	14.736
σ ₈	4993.53	4297.33	5060.26	1.319	15.077
σ ₉	1962.43	1388.05	2044.20	*	*
σ ₁₀	11623.11	9512.52	11556.95	0.572	17.690
σ ₁₁	5668.13	4985.73	5600.73	1.203	10.981
σ ₁₂	4253.64	4048.34	4249.28	0.103	4.729
σ ₁₃	2315.31	2076.45	2272.08	1.903	8.610
σ ₁₄	5277.96	4538.48	5320.94	0.808	14.705
σ ₁₅	6936.29	5685.38	7044.07	1.530	19.288
σ ₁₆	2466.88	1736.35	2669.72	*	*
σ ₁₇	8851.15	7609.56	8664.30	2.157	12.773
σ ₁₈	12448.51	10826.00	12365.05	0.675	12.447
σ ₁₉	7977.21	7062.17	7914.80	0.789	10.773
最大変位 (cm)					
Δv _{max}	103.529	84.092	99.171	4.394	15.205
CPU TIME 4) (sec)	0.4	0.1	0.3		

1) 通常の部材剛性マトリックスに幾何学的非線形性を考慮する幾何剛性マトリックスを加えた部材剛性マトリックスを用いて変位法により解いた解
2) 幾何学的形状の変化を考慮した場合の解と、変位法による解の相対誤差の絶対値
3) 幾何学的形状の変化を考慮しない場合の解と、変位法による解の相対誤差の絶対値
4) DEC3000/300 による計算時間