

エネルギー原理に基づく非線形剛節骨組構造物の最適設計法に関する考察

愛媛大学工学部 フェロー 大久保禎二

愛媛大学工学部 正 谷脇 一弘

愛媛大学大学院 学 ○釣 哲之

1. まえがき

本研究は、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく剛節骨組構造物の非線形解析法に関する研究成果を基本にして、構造物の応力度や変位などの挙動に関する感度係数を用いることなく、線形・非線形挙動状態にある剛節骨組構造物の最適設計問題を統一的、かつ能率的に解くことのできる新しい最適設計法を提案するものである。設計例として、線形および非線形の材料を有する剛節骨組構造物の最適設計例を示し、本研究で提案する方法の有効性および信頼性を明らかにしている。

2. 原最適設計問題の定式化

非線形剛節骨組構造物の原最適設計問題において、各部材要素の断面として幅 B 、高さ H の長方形断面を仮定し、設計変数として B を考慮している。目的関数 W として構造物の全重量あるいは全製作費を考慮し、挙動制約条件として応力度および変位の制約条件 g_σ, g_λ を考慮することにより原最適設計問題を次のように定式化することができる。

$$\text{find } \mathbf{B} = [B_1, B_2, \dots, B_n]^T, \quad \text{which} \quad \text{minimize} \quad W(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n \rho_i B_i H_i l_i \quad (1)$$

$$\text{subject to } g_{\sigma k}(B_k, X_k) = \sigma_{kmax}(B_k, X_k) - \sigma_{ka} \leq 0 \quad (k=1, \dots, n), \quad g_{\lambda l}(\lambda_l) = \lambda_l - \lambda_{la} \leq 0 \quad (l=1, \dots, m), \quad B_i' \leq B_i \leq B_i'' \quad (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

ここに、 ρ_i, l_i はそれぞれ部材 i の単位体積当たりの重量あるいは製作費、および部材長である。 u, l はそれぞれ、上限値および下限値を示す。 n, m はそれぞれ部材数および可動節点変位成分の数を表す。 $\sigma_{kmax}, \sigma_{ka}$ はそれぞれ部材 k の最大応力度および許容応力度を示す。 λ_l, λ_{la} はそれぞれ可動節点変位成分 l の変位量および許容変位量である。

3. 最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づく剛節骨組構造物の非線形解析問題

構造物の全コンプリメンタリーエネルギー最小化による骨組構造物の非線形解析法によれば、骨組構造物の各部材の未知部材端力 $\mathbf{X}$ を決定する解析問題は、各可動節点における力の釣合条件 $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ のもとで、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_C(\mathbf{B}, \mathbf{X})$ を最小化する問題として次式で定式化することができる。

$$\text{find } \mathbf{X} = [X_1^T, X_2^T, \dots, X_n^T]^T, \quad \text{which minimize} \quad \Pi_C(\mathbf{B}, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \beta_i(X_i, P_i, B_i) dl_i \quad (3)$$

$$\text{subject to} \quad g_j(\mathbf{X}) = P_j - \sum_{i=1}^{3n} C_{ji} x_i = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (4)$$

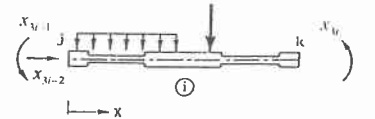


図-1 未知部材端力

ここに、 $\mathbf{X}_i = [x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}]^T$ 、 β_i はそれぞれ図-1に示す未知部材端力および部材 i の単位長さ当たりのコンプリメンタリーエネルギーである。 P_j は可動節点変位成分 j に作用する外力、 C_{ji} は部材端力 X_i の可動節点変位成分 j に対する方向余弦である。

目的関数 $\Pi_C(\mathbf{B}, \mathbf{X})$ を $\Delta \mathbf{X}$ の二次形式で近似するとともに線形制約条件を $\Delta \mathbf{X}$ の線形関数として表現することにより、 k 回目の改良過程における $\mathbf{X}$ の改良のための変化量 $\Delta \mathbf{X}$ を決定する近似二次計画問題を次のように導入することができる。

$$\text{find } \Delta \mathbf{X}^k = [\Delta X_1^{kT}, \Delta X_2^{kT}, \dots, \Delta X_n^{kT}]^T, \quad \text{which minimize} \quad Q_C(\Delta \mathbf{X}^k) = \nabla \Pi_C^T(\mathbf{X}^k) \Delta \mathbf{X}^k + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{X}^{kT} \mathbf{H}_C^k(\mathbf{X}^k) \Delta \mathbf{X}^k \quad (5)$$

$$\text{subject to} \quad h_j(\Delta \mathbf{X}^k) = g_j(\mathbf{X}^k) - \sum_{i=1}^{3n} C_{ji} \Delta x_i = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (6)$$

ここに、 $\nabla \Pi_C = [\partial \Pi_C / \partial x_1, \partial \Pi_C / \partial x_2, \dots, \partial \Pi_C / \partial x_{3n}]^T$ 、 $\mathbf{H}_C^k$ は正定値係数行列であり、BFGS公式により改良する。

上記の近似二次計画問題は、勾配射影法により解くことができ、 $\mathbf{X}^{k+1}$ は $\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \Delta \mathbf{X}^k$ により改良する。この場合 $g_j(\mathbf{X})$ ($j=1, \dots, m$)、 $\nabla \Pi_C(\mathbf{X})$ および $\mathbf{H}_C^k(\mathbf{X})$ の値も $\mathbf{X}^{k+1}$ の改良にともない修正される。このようにして $\mathbf{X}$ を改良するごとに式(5)、(6)の近似二次計画問題を修正し、 $\Pi_C(\mathbf{B}, \mathbf{X})$ および $\mathbf{X}$ が一定値に収束するまで改良を繰り返すことにより、最終的な真の未知部材端力 $\mathbf{X}^*$ を決定することができる。

4. 解析上の必要条件の導入

式(5)および(6)で表されるエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(\mathbf{B}, \mathbf{X}, \lambda)$ を導入することにより解析上満足すべき必要条件として次式を得る。

$$\frac{\partial L(\mathbf{B}, \mathbf{X}, \lambda)}{\partial \Delta \mathbf{X}_t} = \frac{\partial \Pi_C}{\partial \mathbf{x}_t} + \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta \mathbf{x}_t} \right]^T \mathbf{H}_C \Delta \mathbf{X} + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{jt} = 0 \quad (t=1, \dots, 3n) \quad (7)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{B}, \mathbf{X}, \lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^{3n} C_{ji} \Delta x_i - g_j(\mathbf{X}_0) = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (8)$$

5. 最適設計問題の再定式化および $\mathbf{B}, \mathbf{X}, \lambda$ の改良

上記の解析上満足すべき必要条件を原最適設計問題の制約条件として考慮し、 $\mathbf{B}, \mathbf{X}, \lambda$ を独立変数として取り扱うことにより剛節骨組構造物の全重量または全製作費 $\mathbf{W}(\mathbf{B})$ を最小化する最適設計問題を次のように再定式化することができる。

$$\text{find } \mathbf{B}, \mathbf{X}, \lambda, \quad \text{which minimize } \mathbf{W}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n \rho_i B_i H_i l_i \quad (9)$$

$$\text{subject to } \bar{g}_t(\mathbf{B}, \mathbf{X}, \lambda) = \frac{B_t^0}{B_t} \left\{ \frac{\partial \Pi_C(\mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{x}_t} + \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta \mathbf{x}_t} \right]^T \mathbf{H}_C(\mathbf{X}_0) \Delta \mathbf{X} \right\} + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{jt} = 0 \quad (t=1, \dots, 3n) \quad (10)$$

$$\bar{g}_j(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{3n} C_{ji} \Delta x_i - g_j(\mathbf{X}_0) = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (11) \quad g_{ok}(\mathbf{B}_k, \mathbf{X}_k) = \sigma_{k \max}(\mathbf{B}_k, \mathbf{X}_k) - \sigma_{ka} \leq 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (12)$$

$$g_{\lambda l}(\lambda_l) = \lambda_l - \lambda_{la} \leq 0 \quad (l=1, \dots, m) \quad (13) \quad B_i^l \leq B_i \leq B_i^u \quad (i=1, \dots, n) \quad (14)$$

上記の再定式化された最適設計問題を $\Delta \mathbf{B}, \Delta \mathbf{X}, \Delta \lambda$ に関して線形近似し勾配射影法を用いて $\Delta \mathbf{B}, \Delta \mathbf{X}, \Delta \lambda$ を決定する。 $\mathbf{B}, \mathbf{X}, \lambda$ は $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \Delta \mathbf{B}$, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}$, $\lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda$ として改良される。上記の最適設計問題の再定式化、線形近似勾配射影法による解の改良を $\mathbf{W}(\mathbf{B}), \mathbf{B}, \mathbf{X}, \lambda$ が一定値に収束するまで繰り返すことにより、最終的な $\mathbf{B}^*, \mathbf{X}^*, \lambda^*$ を決定することができる。

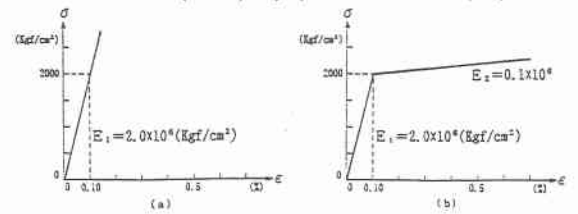


図-2 線形・非線形材料の応力度-ひずみ関係

6. 最適設計例および考察

本研究で提案した最適設計法を図-2 (a)に示す線形材料よりなる図-3の5部材ラーメンに適用し、本研究で提案した方法による解(ENERGY)と挙動の感度係数を用いて双対法により求めた解(DUAL-S)との比較を行った結果を表-1に示す。各部材の応力度はいずれの場合も許容応力度(2000kgf/cm²)と等しくなっており、ENERGYとDUAL-Sの解は一致している。また図-2(b)に示す非線形材料を有する図-4の10部材ラーメンに対して許容応力度を2500kgf/cm²、許容たわみ λ_a を10.0cmおよび2.0cmとした場合の最適解を表-2に示す。これらの最適設計例より明らかごとく、本研究で提案した最適設計法は、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく剛節骨組構造物の非線形解析問題において満足すべき必要条件および解析上の挙動変数を原最適設計問題に加えて等号制約条件および独立変数として取り扱うことにより、挙動の感度係数を用いることなく線形・非線形剛節骨組構造物の最適設計を行うことができることが明らかとなった。

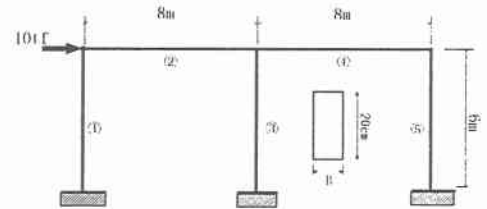


図-3 5部材ラーメン

表-1 5部材ラーメンの最適解の比較
($\lambda_a = 10.0\text{cm}$, $\sigma_a = 2000\text{kgf/cm}^2$)

解法	ENERGY 1)		DUAL-S 2)	
設計変数	B, X, λ		B	
部材番号	B (cm)	$\sigma_{\max}$ (kgf/cm ²)	B (cm)	$\sigma_{\max}$ (kgf/cm ²)
1	7.83	2002	7.69	2000
2	4.61	2002	4.53	1999
3	13.97	2002	14.14	2000
4	3.83	1996	4.11	1926
5	7.09	1960	6.80	2000
W(kgf)	3782.5		3781.9	
$\lambda_{\max}(\text{cm})$	8.6		8.6	
Active な制約条件	応力		応力	

1) 勾配射影法による挙動変数を用いない方法
2) 挙動変数に関する制約条件の感度係数を用いた方法

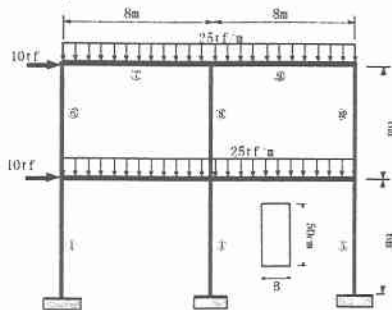


図-4 10部材ラーメン

表-2 10部材ラーメンの最適解($\sigma_a = 2500\text{kgf/cm}^2$)

$\lambda_a = 10.0\text{cm}$			$\lambda_a = 2.0\text{cm}$		
部材番号	$B_{\text{opt}}(\text{cm})$	$\sigma_{\max}(\text{kgf/cm}^2)$	部材番号	$B_{\text{opt}}(\text{cm})$	$\sigma_{\max}(\text{kgf/cm}^2)$
1	1.8	-2234	1	4.8	-1488
2	10.1	2449	2	10.2	2493
3	4.2	-2392	3	5.4	-2091
4	9.5	2398	4	8.7	2464
5	4.3	-2470	5	6.1	-2027
6	4.5	-2440	6	5.5	-2288
7	9.5	-2427	7	9.8	-2479
8	2.0	-2284	8	2.5	-2016
9	9.2	-2500	9	9.5	-2457
10	7.3	-2389	10	15.1	-1863
W(kgf)	17718.6		W(kgf)	21261.5	
$\lambda_{\max}(\text{cm})$	7.0		$\lambda_{\max}(\text{cm})$	2.0	
Active な制約条件	応力		Active な制約条件	応力・変位	