拡散の解応用法における影響係数の修正について

（株）四国総合研究所　正会員　多田東臣

1．従来の研究

拡散方程式を解析的に解き、メッシュに区切った各区間に対応したグリーン関数の積分である影響係数を用いて、陽解法でありながら絶対安定かつCourant条件を回避できる拡散の逐次計算手法[1]を拡散の解応用法と仮に名付けるならば、これは以下のように示される。C_k^{n+1}を時刻$t=(n+1)\Delta t$における点x_kを含むメッシュ内の平均濃度とすれば、逐次計算式はδをCourant数，［　］をガウスの記号として(1)式で与えられる。

$$C_k^{n+1}=\sum_{i=k-m-[\delta+1]}^{k+m-[\delta]} C_i^n\cdot E_{N/P}(j,\ \delta) \qquad \cdots(1)$$

ここに$E_{N/P}$は$j=k-i-[\delta]$であるとして

$$E_{N/P}(j,\ \delta)=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left\{\mathrm{Erf}\left(\frac{x-\delta\Delta x-x_i}{\sqrt{4D_x\Delta t}}\right)-\mathrm{Erf}\left(\frac{x-\delta\Delta x-x_{i+1}}{\sqrt{4D_x\Delta t}}\right)\right\}dx \qquad \cdots(2)$$

で定義される影響係数であり、$x_{i+1}-x_i=\Delta x$である。Nは影響係数の定義されるメッシュ数の大きさ（$N=2m+2$，$m=1,2,\cdots$）で、以後は影響数と呼ぶこととする。（2）式の値をCourant数δの値の変化に応じてその都度求めることは計算時間上不利なので、δをP個の等分割値ごとに番号fをつけてあらかじめ離散的に求めておき、これを用いて台形法により近似する。すなわち補間のための按分比をϕとして

$$\phi=P(\delta-[\delta])-[P\delta-P[\delta]] \qquad \cdots(3)$$

$$E_{N/P}(j,\ \delta)=E_{N/P}(j,f)(1-\phi)+E_{N/P}(j,f+1)\phi \qquad \cdots(4)$$

である。

2．影響係数の修正

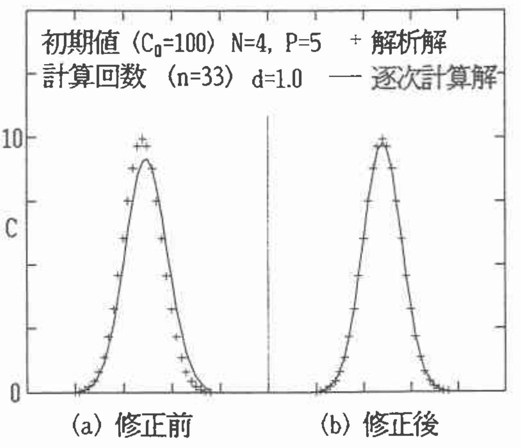
（2）式において$N=4$，$P=5$，$d\equiv\Delta x/\sqrt{4D_x\Delta t}=1.0$として求めた影響係数の例を表－1に示す。同表において$f=0$，$j=2$の値により逐次計算の結果が流れのない場合であっても若干ながら移流効果を生じる。この様子を図－1（a）に示す。そこでこの現象の解消のため同欄の値を0とし、保存則を満たすため同じ値を$f=0$，$j=1$の欄の数値に加える修正を行ない、表－2に示す。これを用いた逐次計算の結果を同図（b）に示す。影響係数をこのように変更することによって流れのある場合もない場合もdのとり方で対応することが可能となり、影響数Nは4，6，8…と、偶数だけになる。

表－1　影響係数の例（N＝4，d＝1）

f	δ	j＝－1	0	1	2
0	0.0	0.256966	0.486068	0.232329	0.024637
1	0.2	.180278	.472006	.303360	.044356
2	0.4	.119727	.432177	.373015	.075081
3	0.6	.075081	.373015	.432177	.119727
4	0.8	.044356	.303360	.472006	.180278
5	1.0	.024637	.232329	.486068	.256966

表－2　修正した影響係数（N＝4，d＝1）

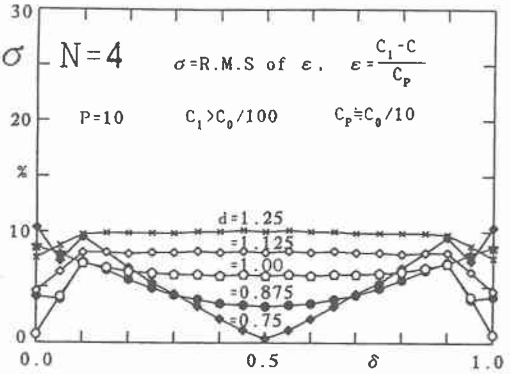
f	δ	j＝　－1	0	1	2
0	0.0	0.256966	0.486068	0.256966	0.0
		δ=0.2～0.8 は表－1と同じ値			
5	1.0	0.0	0.256966	0.486068	0.256966



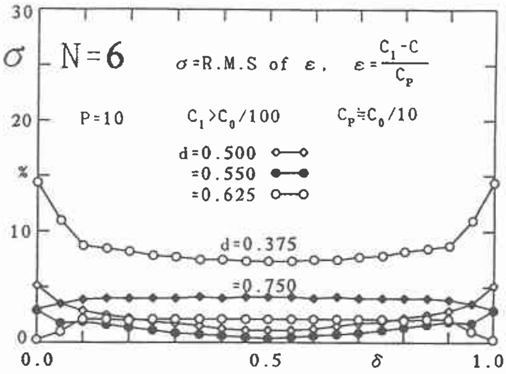
図－1　逐次計算例

3．逐次計算の精度

本手法は（2）式で求められる影響係数が常に１より小さい正数で与えられるので、陽解法でありながら絶対的に安定な計算手法である。したがって計算の精度だけが重要な問題になるため、以下では１メッシュのみに初期値を与えて逐次計算解C_1を求め、その値が解析解Ｃとどれ程の差を生じるかを検討した。計算にあたって定めるべきパラメータとしては影響数Ｎと無次元数ｄである。流速の区分数Ｐは５とか１０にとれば良い。無次元数ｄは（2）式の特性を定める重要なもので、拡散数ｒとは $r=1/4d^2$ の関係がある。ｘ軸上の１つのメッシュx_iに初期値$C_0=100$を与えて逐次計算を行ない、解析解Ｃのピーク値C_Pが$C_P/C_0<0.1$となった時点で、$C_1/C_0>1/100$となる範囲の（C_1-C）のR.M.Sを求めピーク値C_Pに対する比を相対誤差として求めたものが図－2，図－3である。Courant数δが0～1に対してN＝4，6に共通してδ＝0．5で対称となっている。図－2において各グラフが両端で折れ曲がっているのは2．で影響係数を修正したことにもとづく。いずれも精度の向上をもたらしている。図～1で示したｄ＝1の場合の修正前の影響係数による結果を一部★印で書き加えている。

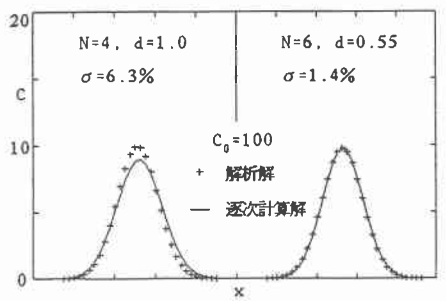


図－2　影響数Ｎ＝４の逐次計算誤差



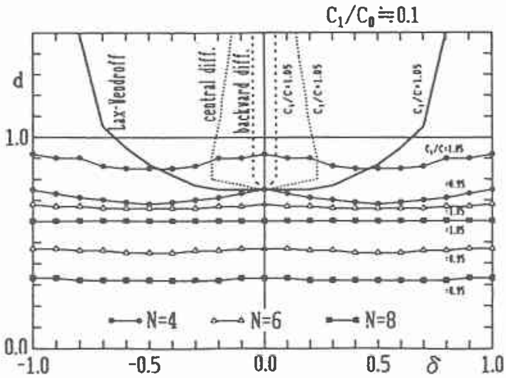
図－3　影響数Ｎ＝６の逐次計算誤差

さて相対誤差と分布図の関係を図にしたものが図－４である。初期値C_0との相対誤差はさらに１桁小さくなることを考えれば５～１０％以下であれば予測精度としては実用域にあるといえよう。このことから影響数Ｎ＝４の場合ｄ＝０．７～１．１以内で、またＮ＝６の場合はｄ＝０．４～０．８以内の値を採用すれば、ほぼ初期値との相対誤差は１％以内におさえて逐次計算できるといえよう。



図－４　相対誤差の比較

図－５にはLax-Wendroff法や差分法の精度と比較して相対誤差５％の線を示した。従来手法は図の範囲を少し下回るとすぐに解が発散してしまうので精度とともに安定性の境界にもなっていると見なせる。Lax-Wendroff法はｄ＞0.9において良い精度を保ち、本手法と補完的であることが分かった。



図－５　差分法等との関係

参考文献 1) 多田東臣　拡散問題に対する解析解を応用した逐次計算手法の提案
土木学会論文集Ⅱ pp1-10 1994.2 Ⅱ-26 No.485