

挙動の感度係数を用いない非線形剛節骨組構造物の最適設計法に関する基礎的考察

愛媛大学工学部 正 大久保禎二 愛媛大学工学部 正 谷脇 一弘
愛媛県正 ○青野 将也

1. まえがき

本研究は、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づき導入した剛節骨組構造物の線形および非線形挙動状態における解析上満足すべき必要条件を、設計上考慮すべき制約条件群と同時に考慮するとともに、部材断面幅のみならず部材端力および変位をも独立な設計変数として考慮した非線形骨組構造物の最適設計問題を定式化し、この最適設計問題を構造物の挙動の感度係数を用いないで勾配射影法の手法を用いて解く方法について基礎的考察を行ったものである。

2. エネルギー原理に基づく非線形解析法

構造物の全コンプリメンタリーエネルギー最小化による骨組構造物の非線形解析法によれば、骨組構造物の各部材の未知部材端力 X を決定する解析問題は、各可動節点における力の釣合条件 g_j のもとで、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_c(X)$ を最小化する問題として次式で定式化することができる。

$$\begin{aligned} \text{find } & X, \text{ which} \\ \text{minimize } & \Pi_c(X) = \sum_{i=1}^n \Pi_{ci}(X_i) & (i=1, \dots, m) \\ \text{subject to } & g_j(X) = P_j - \sum_{t=1}^{3n} C_{jt} X_t = 0 & (j=1, \dots, m) \\ & (t=1, \dots, 3n) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $\Pi_{ci}(X_i)$ は部材 i のコンプリメンタリーエネルギー、 C_{jt} は部材端力 X_t の可動節点変位成分 j に対する方向余弦、 P_j は可動節点変位成分 j に作用する外力である。また n は部材数、 m は可動節点変位成分の数である。

このエネルギー最小化問題は、目的関数を二次形式に、また制約条件を一次形式に近似して近似二次計画問題を導入し、これをLPおよび勾配射影法の手法を用いて解き改良解を求めるこをくり返すことにより X を求めることができる。¹⁾

3. 解析上の必要条件の導入

まず、式(1)および(2)で表わされる剛節骨組構造物の $\Pi_c(X)$ を X の二次形式で近似すると次式を得る。

$$\Pi_c(X) = \Pi_c^0 + \nabla \Pi_c^T + \frac{1}{2} \Delta X^T H_c \Delta X \quad (3)$$

次に上記の二次近似した $\Pi_c(X)$ および式(2)の制約条件で表わされる剛節骨組構造物の線形・非線形解析問題の解が満足すべき必要条件を求めるため、式(3)および(2)の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(X, \lambda)$ を次式のように導入する。

$$L(X, \lambda) = \Pi_c(X) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(X) \quad (4)$$

ここに、 λ_j は $g_j(X)$ に関するラグランジュ乗数である。

式(4)のラグランジュ関数 $L(X, \lambda)$ の極値が満足すべき必要条件（停留条件）は、 $L(X, \lambda)$ の X および λ に関する一次の偏微分係数を0と置くことにより、次式のように導入することができる。

$$\frac{\partial L(X, \lambda)}{\partial X_t} = \frac{\partial \Pi_c(X)}{\partial X_t} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(X)}{\partial X_t} = 0 \quad (5) \qquad \frac{\partial L(X, \lambda)}{\partial \lambda_j} = -g_j(X) = 0 \quad (6)$$

ここで、式(5)における $\partial \Pi_c(X)/\partial X_t$ 、 $\partial g_j(X)/\partial X_t$ はそれぞれ次式より求められる。

$$\frac{\partial \Pi_c(X)}{\partial X_t} = \nabla \Pi_c^T + H_c(X - X^0) \quad (7) \qquad \frac{\partial g_j(X)}{\partial X_t} = -C_{jt}, \quad (8)$$

式(7)における $\nabla \Pi_c^T$ および H_c の各要素の値は、解析問題を解いた際にすでに計算されているコンプリメンタリーエネルギーの勾配とBFGS公式により改良された正定値係数行列 H_c を用いればよい。

式(5)、(6)、(7)、(8)より、解析上満足すべき必要条件として式(9)および(10)を得る。

$$\frac{\partial L(X, \lambda)}{\partial X_t} = \nabla \Pi_c + H_c(X - X^0) + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{jt} = 0 \quad (9) \qquad \frac{\partial L(X, \lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{t=1}^{3n} C_{jt} X_t - P_j = 0 \quad (10)$$

式(9)は実際の解析問題の計算例より明らかであるが、各可動節点変位成分に対する変位の適合条件式となっており、式(10)は各可動節点変位成分に対する外力と部材端力の釣合方程式となっている。

4. 挙動の感度係数を用いない最適設計法の定式化

通常の最適設計問題における各部材の最大応力度および各可動節点変位に関する制約条件式群に加えて、式(9)および(10)で表される解析上満足すべき必要条件をも制約条件式群として考慮し、 B, X, λ を独立変数として取り扱うことにより、剛節骨組構造物の全重量または全製作費 W を最小化する最適設計問題を次のように定式化することができる。

find B, X, λ , which

$$\text{minimize} \quad W(B) = \sum_{i=1}^n \rho_i B_i h_i l_i \quad (11-1)$$

$$\text{subject to} \quad g_t(B, X, \lambda) = B \cdot \left(\frac{1}{B^0} \cdot \nabla H_C \right) + H_C(X - X^0) + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{jt} = 0 \quad (t=1, \dots, 3n) \quad (11-2)$$

$$g_j(X) = \sum_{i=1}^{3n} C_{ji} X_i - P_j = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (11-3)$$

$$g_{\sigma k}(B, X) = \sigma_k(B, X) - \sigma_{ak} \leq 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (11-4)$$

$$g_{\lambda i}(B, \lambda) = \lambda_i(B) - \lambda_{ai} \leq 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (11-5)$$

ここに、 ρ_i, h_i, l_i は、それぞれ部材 i の単位体積当りの重量あるいは製作費、断面高さおよび部材長である。また $g_{\sigma k}, g_{\lambda i}$ は、それぞれ部材 k の最大応力度および可動節点変位成分 i の変位に関する制約条件、 $\sigma_{ak}, \lambda_{ai}$ は、それぞれ部材 k の許容応力度および可動節点変位成分 i の許容変位量である。

5. 最適設計問題の解法

本研究では、式(11-1)～(11-5)の非線形最適設計問題を解くため、まず式(11)の線形近似最適設計問題を導入し、その近似最適設計問題を勾配射影法の手法を用いて解き B, X, λ の改良値 $\Delta B, \Delta X, \Delta \lambda$ を決定した。このようにして求めた ΔB を用いて剛節骨組構造物の各部材の断面幅 B を改良し、 W および B が一定値に収束するまで改良を繰り返すことにより、最適解 W_{opt} および B_{opt} を決定することができる。

6. 最適設計例

上で述べた方法により、図-1に示す応力度-ひずみ関係を有する材料よりなる図-2の3部材ラーメンの最適設計を行った結果を表-1に示す。

$\lambda_a = 50.0\text{cm}$ とした場合には、応力度に関する制限のみが支配的な制約条件となっており、各部材の最大応力度は σ_a と等しくなっている。また、 $\lambda_a = 10.0\text{cm}$ とした場合には変位の制約条件のみが支配的な制約条件となっている。また、最適解における各部材の最大応力度は $2007\sim2027\text{kgf/cm}^2$ となっており、全て材料の応力度-ひずみ関係の非線形領域の応力度となっている。 λ_a をさらに厳しく制限し $\lambda_a = 5.0\text{cm}$ とした場合には、最適解における部材の最大応力度は $1067\sim1207\text{kgf/cm}^2$ となっており、材料の応力度-ひずみ関係における線形領域の値をとっている。

7. 結論

本研究により、通常の最適設計問題に最小コントリュエネルギーの原理に基づく剛節骨組構造物の非線形解析問題において満足すべき必要条件を等号制約条件として付加し、さらに挙動変数をも独立変数として取扱い、最適化を行うことにより、挙動に関する感度係数を用いることなく非線形剛節骨組構造物の最適解を決定することができることが明らかとなつた。

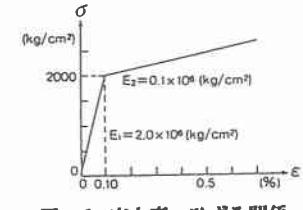


図-1 応力度-ひずみ関係

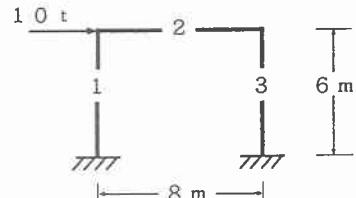


図-2 3部材ラーメン

表-1 3部材ラーメンの最適解

応力制限	$\sigma_a = 3000 \text{ kgf/cm}^2$						
	$\lambda_a = 50.0 \text{ cm}$		$\lambda_a = 10.0 \text{ cm}$		$\lambda_a = 5.0 \text{ cm}$		
部材番号	B (cm)	σ_{max} (kgf/cm ²)	B (cm)	σ_{max} (kgf/cm ²)	B (cm)	σ_{max} (kgf/cm ²)	
	1	7.13	3001	11.96	2026	23.49	
2	4.34	2995	8.15	2007	16.30	1065	
3	7.10	3002	11.57	2027	23.06	1208	
W (kgf)		1885.9			3239.1		
λ_{max} (cm)		42.1			10.0		
ACTIVE な制約条件		応力		変位		変位	

* 初期断面幅 $B^0 = 50.0\text{cm}$ 、断面高 $H = 20.0\text{cm}$ 、単位体積重量 $\rho = 7.85\text{gf/cm}^3$

[参考文献] 1) Ohkubo.S and Makino.K, computer & Structures, Vol.44, No.1/2, pp.193~206