

沈降過程を考慮した自重圧密方程式の差分解析法

徳島大学工学部

正 山上 拓男

(株) 阪神コンサルタンツ 正 ○酒井 信介

1. はじめに 本研究の目的は、沈降過程を考慮した自重圧密方程式の差分解析法を提案することである。

浚渫土のような高含水状態の泥土は、初期状態がある限度以上軟弱になると沈降過程を伴う。このような泥土の圧密挙動を正確に把握するには、沈降過程を考慮した解析を行う必要がある。ここでは、沈降過程を考慮した支配微分方程式としてPaneら¹⁾のそれを採用し、これをDouglas-Jonesの予測子・修正子法²⁾で差分展開することを試みた。なお上記の差分解析法は、我々が沈降過程を考慮していない自重圧密方程式に対してその有用性を確認している³⁾解析法である。

2. 予測子・修正子法の適用 Paneらの沈降過程を考慮した自重圧密方程式は次式で与えられる：

$$\left[\frac{\gamma_s}{\gamma_w} - 1 \right] \frac{d}{de} \left[\frac{k}{1+e} \right] \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\gamma_w(1+e)} \beta \frac{d\sigma'}{de} \frac{\partial e}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\gamma_w(1+e)} \frac{d\beta}{de} \sigma' \frac{\partial e}{\partial z} \right] + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

ここに、 γ_s :土粒子の単位重量、 γ_w :液体の単位重量、 k :透水係数、 σ' :有効応力、 e :間隙比、 t :時刻、 z :物質座標と称する空間座標。また β は e の関数として表される係数で、 $e > e_m$; $\beta = 0$, $e \leq e_m$; $0 < \beta \leq 1$ となる。なお e_m は沈降過程と自重圧密過程の境界を表す間隙比である。式(1)を予測子・修正子法で差分展開した場合次のようになる。ただし展開途上の各式は煩雑なため、紙面の都合上ここではそれらの提示を割愛する。

予測子

$$-\alpha_1(e_j) \cdot e_{i+1,j+1/2} + 2 \left[\alpha_1(e_j) + \frac{\Delta z^2}{\Delta t} g_{1,P} \right] e_{i,j+1/2} - \alpha_1(e_j) \cdot e_{i-1,j+1/2} = \frac{2\Delta z^2}{\Delta t} g_{1,P} e_{i,j} - \Delta z^2 g_{2,P} \quad (2)$$

$$g_{1,P} = -\gamma_w \quad (2a), \quad g_{2,P} = - \left\{ \gamma_c \alpha_2(e_j) + \frac{d}{de} [\alpha_1(e_j)] \frac{(e_{i+1,j} - e_{i-1,j})}{2\Delta z} \right\} \frac{(e_{i,j+1/2} - e_{i,j-1/2})}{2\Delta z} \quad (2b)$$

修正子

$$-\alpha_1(e_{j+1/2}) \cdot e_{i+1,j+1} + 2 \left[\alpha_1(e_{j+1/2}) + \frac{\Delta z^2}{\Delta t} g_{1,C} \right] e_{i,j+1} - \alpha_1(e_{j+1/2}) \cdot e_{i-1,j+1} = \alpha_1(e_{j+1/2}) \cdot e_{i,j+2} - 2 \left[\alpha_1(e_{j+1/2}) - \frac{\Delta z^2}{\Delta t} g_{1,C} \right] e_{i,j} + \alpha_1(e_{j+1/2}) \cdot e_{i,j-2} - 2\Delta z^2 g_{2,C} \quad (3)$$

$$g_{1,C} = -\gamma_w \quad (3a), \quad g_{2,C} = - \left\{ \gamma_c \alpha_2(e_{j+1/2}) + \frac{d}{de} [\alpha_1(e_{j+1/2})] \frac{(e_{i+1,j+1/2} - e_{i-1,j+1/2})}{2\Delta z} \right\} \frac{(e_{i,j+1/2} - e_{i,j-1/2})}{2\Delta z} \quad (3b)$$

ここに、 Δz :空間差分間隔、 Δt :時間差分間隔、 i (添字):空間差分子、 j (添字):時間差分子。また α_1 、 α_2 及び γ_c は以下に示すとおりである。

$$\alpha_1(e) = \frac{k}{1+e} \left[\beta \frac{d\sigma'}{de} + \frac{d\beta}{de} \sigma' \right] \quad (4), \quad \alpha_2(e) = \frac{d}{de} \left[\frac{k}{1+e} \right] \quad (5), \quad \gamma_c = \gamma_s - \gamma_w \quad (6)$$

特に、沈降過程($e > e_m$)では $\beta = 0$, $d\beta/de = 0$ であるから $\alpha_1(e) = 0$ となり、式(2)、(3)は次のように表される。

予測子

$$\frac{2\Delta z^2}{\Delta t} g_{1,P} e_{i,j+1/2} = \frac{2\Delta z^2}{\Delta t} g_{1,P} e_{i,j} - \Delta z^2 g_{2,P} \quad (7), \quad g_{1,P} = -\gamma_w \quad (7a), \quad g_{2,P} = -\gamma_c \alpha_2(e_j) \frac{(e_{i+1,j} - e_{i-1,j})}{2\Delta z} \quad (7b)$$

修正子

$$\frac{2\Delta z^2}{\Delta t} g_{1,C} e_{i,j+1} = \frac{2\Delta z^2}{\Delta t} g_{1,C} e_{i,j} - 2\Delta z^2 g_{2,C} \quad (8), \quad g_{1,C} = -\gamma_w \quad (8a), \quad g_{2,C} = -\gamma_c \alpha_2(e_{j+1/2}) \frac{(e_{i,j+1/2} - e_{i,j-1/2})}{2\Delta z} \quad (8b)$$

3. 解析方法 沈降過程を考慮した自重圧密問題の解析は、上記差分展開式を用いて以下のように行う。

今任意の時刻において、泥土層中で沈降過程と自重圧密過程が生じているものとする。この層の空間差分分割点上で、 $e = e_m$ となる点に着目する。この時、その点より上方は沈降過程($e > e_m$)にあることから式(7)、(8)で解を求める。またその点よりも下方では自重圧密過程($e \leq e_m$)にあるから式(2)、(3)を用いる。沈降過程に対して式(7)、(8)を適用して解析した結果、 $e \leq e_m$ となる差分点が生じた場合その点は次のタイムステップ

で自重圧密過程として取り扱う。その際、自重圧密過程にある領域の上端に位置する差分点の間隙比は e_m とする。上記過程を繰り返すことで、沈降過程と自重圧密過程の境界が逐次下方から上方に向かって移動し、最終的には沈降過程が消失し全層に渡って自重圧密過程のみとなる。以上のように、本研究では沈降過程と自重圧密過程における解を別々に求める方法を用いた。

ここで、式(7)、(8)はそれぞれ式中に含まれる未知量が1個であることから容易に解くことができる。これに対して、式(2)、(3)は式中に3個の未知量を含んでいることから、解を得るには連立方程式(3項行列式)を解く必要がある。この説明に関しては、文献(3)を参照されたい。

4. 適用例と結び ここでは、Schiffmanら⁴⁾が示している沈降過程を伴った自重圧密問題への適用結果を示す。問題は表-1に示す2ケースである。また $e-\sigma'$ ； $e-k$ 関係は、彼らの実験結果を以下に示すべき乗関数形で近似した。

$$e-\sigma' \text{ 関係: } \sigma' = 24.57 e^{-2.91} \quad (\text{kN/m}^2)$$

$$e-k \text{ 関係: } k = 0.4 \times 10^{-6} e^{4.01} \quad (\text{cm/min}) ; e \leq e_m (=30)$$

$$k = 1.1 \times 10^{-5} e^{3.14} \quad (\text{cm/min}) ; e > e_m (=30)$$

図-1、図-2に沈下量の経時変化を、図-3に過剰間隙水圧の時間推移を示す。また表-2に最終沈下量の値を呈示する。各図中の●印は、Schiffmanらの実験結果をあらわしたものである。これらの図にみられるように、解析値は実験結果を精度よく表しうる分布となった。なおこれらの解析に要した演算時間は、パーソナルコンピュータ (CPU:80387SX-20MHz) で圧密開始後6000分までの計算に、Test2の場合204秒、Test11で200秒であった。

以上の結果より、沈降過程を考慮した自重圧密方程式の差分法としてDouglas・Jonesの予測子・修正子法が適用可能であることが確認された。今後、種々の条件のもとでの検討を重ねていく予定である。

表-2 最終沈下量

ケース名	実験値	解析値
Test2	33.0cm	32.6cm
Test11	29.0cm	28.5cm

【参考文献】 1)Pane, V. and Schiffman, R.L.: A note on sedimentation and consolidation, Geotechnique, Vol. 35, No. 1, pp. 69~72, 1985. 2)Douglas, J. and Jones, B.F.: On predictor-corrector methods for nonlinear parabolic differential equations, J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 11, No. 1, pp. 195~204, 1963. 3)Yamagami, T. and Sakai, S.: A finite difference solution to self-weight consolidation equations, Computer Methods and Advances in Geomechanics, Proc. 7th Inter. Con. on Com. Meth. and Advance in Geome., CAIRNS, pp. 1255~1260, 1991. 4)Schiffman, R.L., Pane, V. and Sunara, V.: Sedimentation and consolidation, Proceedings of Engineering Foundation Conference on Flocculation, Sedimentation and Consolidation, Sea Island, Georgia, pp. 57~121, 1985.

表-1 解析ケース

ケース名	初期層厚 H_0	初期間隙比 e_0	排水条件
Test2	37.0cm	102	片面排水
Test11	33.8cm	72	片面排水

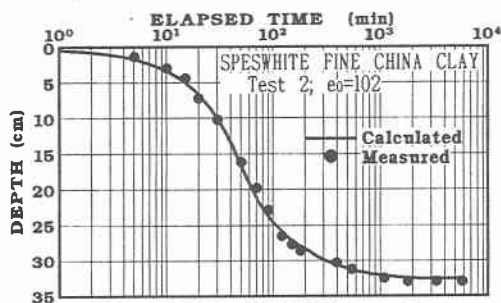


図-1 沈下量の経時変化(Test2)

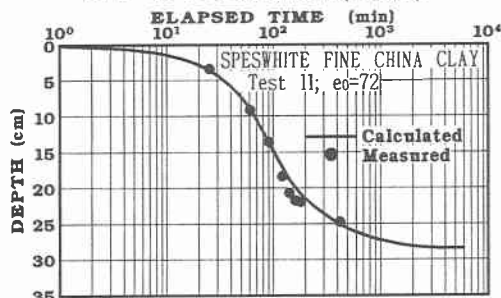


図-2 沈下量の経時変化(Test11)

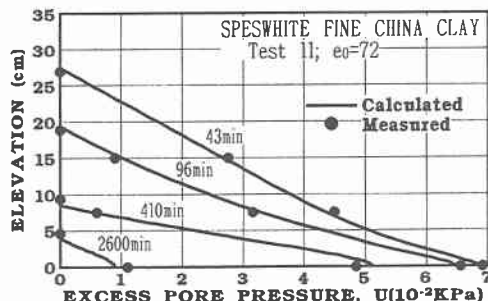


図-3 過剰間隙水圧の時間推移(Test11)