Lax-Wendroff法におけるCourant条件の回避

（株）四国総合研究所　正会員　多田東臣

１．はじめに

拡散方程式は空間における物質や熱の拡がりを工学的に記述するために重要であるが、現象を逐次計算によって解析する場合、差分法や有限要素法など各種の方法によって解を求めるのが通常である。本研究はこのうちLax-Wendroff（ＬＷ）法について検討を行ない、移流に関する計算安定条件とされている Courant数 $\delta\ (=u\Delta t/\Delta x)\leqq 1$ を越える場合にも見かけ上安定して計算できる手法とその条件について述べるものである。

２．方程式の解による計算スキームの修正

流体中の物質の移流・拡散現象を念頭において、検討を行なう。物質の濃度をＣとおくとき基礎式は D_x：拡散係数（m^2/s）　ｕ：流速（ｍ／ｓ）　ｔ：時間（ｓ）として、ｘ軸方向１次元拡散の場合

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)+u\frac{\partial C}{\partial x}\qquad(1)$$

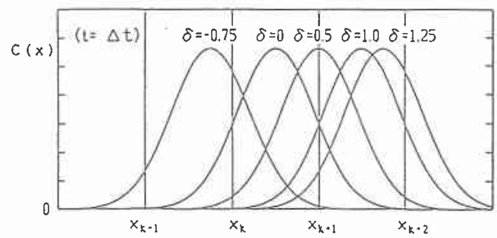
逐次計算の刻み幅をΔｘ、ステップ時間をΔｔにとるとき（１）式に加えて初期値を点ξ_i周りのΔｘの間に

$$C(x)=C_0(\xi_i)\qquad \xi_i-\Delta x/2\leqq x\leqq \xi_i+\Delta x/2$$

$$C(x)=0\qquad x<\xi_i-\Delta x/2,\ x>\xi_i+\Delta x/2$$

と与えると、解は $D_x=\mathrm{const}$ として次のように得られる。

$$C(x)=C_0(\xi_i)\left\{\mathrm{erf}((x-u\Delta t-\xi_i+\Delta x/2)/\sqrt{4D_x\Delta t})-\mathrm{erf}((x-u\Delta t-\xi_i-\Delta x/2)/\sqrt{4D_x\Delta t})\right\}\qquad(2)$$



図－１ Courant数と移流との関係

となる。ここに

$$\mathrm{erf}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp(-x^2)\,dx$$

は、全空間で積分が１になる誤差関数である。

（２）式によればΔｔ後の分布はクーラン数の値によって図－１に示すようにｘ軸方向を平行移動するが、縦軸の値は各曲線とも全く等しい。$\delta=k$（整数）のときはちょうどｋΔｘだけ分布が移動する。一般にδの値を整数部と小数部に分けると、整数部の値は分布の山が移動する刻み幅Δｘの数に等しい（条件１）。一方、ＬＷ法は拡散数を $r\ (=D_x\Delta t/(\Delta x)^2)$ として次式のように表される。

$$C_i^{n+1}=\left(r+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{2}\right)C_{i-1}^n+(1-2r-\delta^2)C_i^n+\left(r-\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{2}\right)C_{i+1}^n\qquad(3)$$

右辺３項の各係数をそれぞれE_1, E_0, E_{-1}とおけばE_1は $t=n\Delta t$ におけるC_{i-1}^nが $t=(n+1)\Delta t$ でのC_i^{n+1}へ及ぼす影響の割合を与えていることになる。E_0はC_i^nが同じ点C_i^{n+1}へ、E_{-1}はC_{i+1}^nがC_i^{n+1}へ及ぼす影響割合を示している(条件２)。条件１，条件２を合わせて考慮することにより、仮に$\delta=1.4$であれば まずδを１と0.4に分け、$\delta=0.4$とした場合の各係数値E_1, E_0, E_{-1}を求めて（３）式右辺を計算する。つぎにこれを左辺の点C_i^{n+1}の値とすべきところ残る$\delta=1$を考慮してC_{i+1}^{n+1}の値であると考えることができる。すなわち$\delta=k+\varepsilon$,（ｋは整数、$|\varepsilon|<1$）とおけば

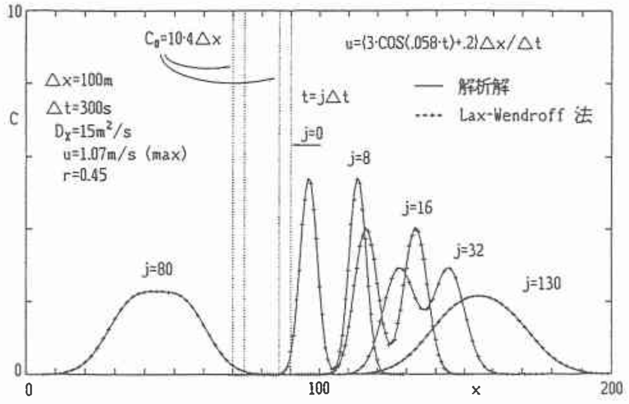
$$C_{i+k}^{n+1}=\left(r+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)C_{i-1}^n+(1-2r-\varepsilon^2)C_i^n+\left(r-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)C_{i+1}^n\qquad(4)$$

と(３)式を書き直すことができる。さらにｋ, εは正負を規定していないので例えば$\delta=0.6$ であれば$k=1$, $\varepsilon=-0.4$ とすることも可能である。このことは分布が輸送距離ｕΔｔを中心として左右対称形であること

から了解される。ＬＷ法は拡散数ｒの値によってはδ＞0.5でも安定な場合があるので０≦｜δ｜≦0.5の範囲で逐次計算が精度、安定性の上で問題がないと判断できるような場合には（４）式によりすべてのδに対しても計算が可能になるといえる。ただし涌き出し、吸い込み等によりδの値が隣り合う２点で違う場合にはこの考え方は適用できない。

３．逐次計算例と安定性

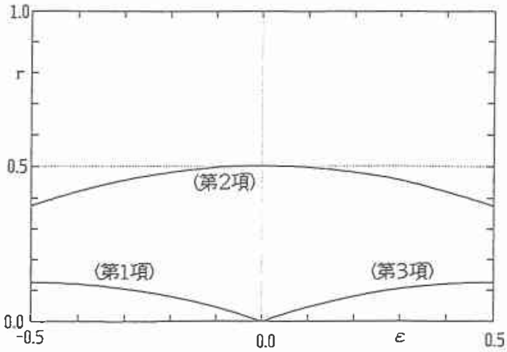
（４）式による拡散の逐次計算例としてクーラン数が最大3.2になるような正弦周期の流れの下で２ヶ所に与えられた初期値の経時変化を求め、図－２に示した。解析解は（２）式により求めたもので、両者は良い一致をしている。数値を直接比較すると濃度の最も高い点で0.5～1.5％の誤差に収まっていることが分かった。ＬＷ法に対する主要部分の計算プログラムは図－３に示す通りである。逐次計算として安定性を保つような条件としては（４）式の右辺の各係数が負にならないことと考え、それぞれの式からｒ－ε曲線を求めたものが図－４である。３本の曲線で囲まれる部分が安定に計算される範囲である。しかしながら図－３に示した例のようにｒ＝0.45という値は部分的には安定な範囲から外れる数値であるが、その回数が頻繁でなければ、隣り合う濃度の値によって打ち消し合うことになり、計算は安定して行なうことが可能である。試みに計算を行なうとｒ=0.46でやや不安定になり、ｒ＝0.47では安定性を保ち得ないことが分かった。また結果は図示しないが初期値を１点のみに与えて、流速を一定にした場合には用いるｒ－εが同範囲から逸脱することによって、結果はより早く不安定になり易いことが確認された。



図－２　クーラン数が１を越える逐次計算例

```
DIM C(200,1)  :R=.45 :C(100,1)=10
FOR IT=1 TO 130
 KK=IT MOD 2  :LL=1-KK
 T=IT-.5  :IRG=0
 DLT= 3!*COS(.058*T)+.2
 UK=SGN(DLT)*INT(ABS(DLT))  :YPS=DLT-UK
 IF ABS(YPS)>=.5 THEN IRG=SGN(YPS)  :YPS=YPS-IRG
 FLW2=YPS/2  :FFLW=YPS^2  :FFLW2=FFLW/2
 ALW(1)=R+FLW2+FFLW2
 ALW(2)=1-2*R-FFLW
 ALW(3)=R-FLW2+FFLW2
FOR IX=1 TO 200
  CO=C(IX,KK)  :C(IX,KK)=0
 FOR IE=1 TO 3
   JX=IX+IE-2+IRG+UK
   IF JX<0 OR JX>200 THEN GOTO ***
   C(JX,LL)=C(JX,LL)+CO*ALW(IE)
*** NEXT IE
 NEXT IX
NEXT IT
END
```

図－３　修正したＬＷ法のBASICプログラム例



図－４　逐次計算の安定な範囲

４．結論

(１)一次元拡散の逐次計算を行なう場合に Lax－Wendroff法は(４)式のような修正を施すことにより任意のCourant数に対しても安定かつ高精度に計算できる。

(２)計算が安定に行なえる範囲は図－４に示す曲線の内側であるが、この範囲を越えた場合は直ちに不安定になるというわけではなく、隣り合う濃度値で打ち消し合うことにより一時的に安定を保っている場合もある。

今後は問題を２，３次元の拡散について検討を行ないたい。