

エネルギー原理に基づく非線形トラス構造物の節点変位解析について

愛媛大学工学部 正 大久保禎二 宇部興産(株) 正 和多田康男
(株) 長大 正 〇田中 賢太

1. まえがき

著者らは、これまでに最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラス構造物の線形・非線形挙動状態における部材力の解析法¹⁾を提案しているが、この解析法においてはエネルギー最小化問題のラグランジュ関数を導入し、最終的な部材力を決定すると同時にラグランジュ乗数 λ^* をも同時に決定している。本研究では、この λ^* が各可動節点における実変位と等しくなることを数理計画法およびCrotti-Engesserの定理と比較することにより数式的に示すとともに、数値計算例により検証した結果について述べる。

2. エネルギー原理に基づくトラス構造物の部材力解析問題の定式化

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によれば、トラス構造物の部材力 N を決定する問題は、各可動節点における力の釣合条件式 $g_j (j=1, \dots, m)$ のもとで、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_c(N)$ を最小化する次のような非線形のエネルギー最小化問題として定式化することができる。

$$\text{find } N, \text{ which minimize } \Pi_c(N) = \sum_{i=1}^n \Pi_{ci}(N_i) \quad (1)$$

$$\text{subject to } g_j = P_j - C_j N = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (2)$$

ここに、 $\Pi_{ci}(N_i)$ は部材 i のコンプリメンタリーエネルギー、 P_j は可動節点変位成分 j に作用する外力、 C_j は N の可動節点変位成分 j への変換行マトリックス、 n は部材数、 m は自由度の数である。

3. 非線形解析問題のラグランジュ関数の導入

いま、式(2)の制約条件 g_j を

$$\overline{g_j}(N) \equiv C_j N - P_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (3)$$

と書き改め、式(1)および(3)で表わされるトラス構造物のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(N, \lambda)$ を導入すると次式を得る。

$$L(N, \lambda) = \Pi_c(N) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (P_j - \overline{g_j}(N)) \quad (4)$$

上式において、 λ_j はラグランジュ乗数である。

4. ラグランジュ関数の停留値におけるラグランジュ乗数 λ^* と可動節点変位 u との関係

式(1)および(3)で定義したコンプリメンタリーエネルギー最小化問題において、全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_c(N)$ の停留値 $\Pi_c(N^*)$ におけるラグランジュ乗数 λ_j^* は、制約条件 $\overline{g_j}$ の定数項 P_j の変化による目的関数 $\Pi_c(N^*)$ の変化量として次式で表わすことができる。²⁾

$$\lambda_j^* = \partial \Pi_c(N^*) / \partial P_j \quad (5)$$

一方、Crotti-Engesserの定理により、次式が成り立つことが明らかにされている。³⁾

$$u_j = \partial \Pi_c(N^*) / \partial P_j \quad (6)$$

ここに、 u_j は可動節点変位成分 j における外力による実変位である。

式(5)と式(6)を比較することにより、 $\lambda_j^* = u_j$ となり、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_c(N)$ の停留値 $\Pi_c(N^*)$ におけるラグランジュ乗数 $\lambda^* = [\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*]^T$ は、外力による実変位 $u = [u_1, \dots, u_m]^T$ と等しくなることがわかる。

5. 数値計算による検証および考察

つぎに、式(5)および式(6)のラグランジュ乗数 λ_j^* および可動節点変位 u_j を以下の方法により求め、数值的に $\lambda_j^* = u_j$ となることを検証した。

(1) ラグランジュ乗数 λ^* の計算方法

式(4)で表わされるラグランジュ関数をマトリックス表示すると、

$$L(N, \lambda) = \Pi_C(N) - \lambda(P - CN) \quad (7)$$

となり、上式の N に関する停留条件より次式が得られる。

$$\nabla_N \Pi_C(N) + C^T \lambda = 0 \quad (8)$$

したがって、真の部材力 N^* が求められると、ラグランジュ乗数 λ^* は次式により求めることができる。

$$\lambda^* = -(CC^T)^{-1} C \nabla_N \Pi_C(N^*) \quad (9)$$

上式において、構造物の幾何学的な形状の変化を無視し得る場合には $(CC^T)^{-1} C$ は一定値をとり、また $\nabla_N \Pi_C(N^*)$ は N^* による各部材の伸びとして極めて簡単な式により容易に求めることができる。¹⁾

(2) Crotti-Engesser の定理による可動節点変位 u の計算方法

式(6)で表わされる Crotti-Engesser の定理による可動節点変位 u_j は、近似的に次式により計算した。

$$u_j = \frac{\partial \Pi_C(N^*)}{\partial P_j} \approx \frac{\Pi_C^*(P + \Delta P_j) - \Pi_C^*(P)}{\Delta P_j} \quad (10)$$

ここに、 ΔP_j は求めようとする可動節点変位成分 j の方向に人為的に加えられた微小外力であり、これまでの研究成果に基づき、ここでは、 $\Delta P_j = 0.001 P_j$ を用いることとした。⁴⁾

(3) 計算結果の比較および考察

上記の二種類の方法により、図-1に示すバイリニアな応力度-ひずみ関係を有する材料よりなる図-2の(A)，(B)に示す15および16部材トラスの荷重が載荷されている節点④および③における鉛直および水平変位について解析を行った結果および二種類の方法により求めた解の相対誤差を表-1に示す。この表より明らかに、ラグランジュ乗数 λ^* と可動節点変位 u との相対誤差は、

部材の最大応力レベルが弾性域内にあるか、あるいは弾性域を越えた領域にある場合であるかに関係なく、0.03%~0.23%と非常に小さな値となっており、式(4)のラグランジュ関数の停留条件を満足するラグランジュ乗数 λ^* は、実外力による可動節点変位 u と同一の値となることが確認された。また、応力度-ひずみ関係が複数個の直線で表わされる材料や曲線で表わされる材料の場合においても全く同様の結果を得ており、いかなる線形・非線形の材料に対しても、エネルギー最小化による非線形解析法により、部材力のみならず可動節点変位をも同時にかつ正確に求められることが明らかとなった。

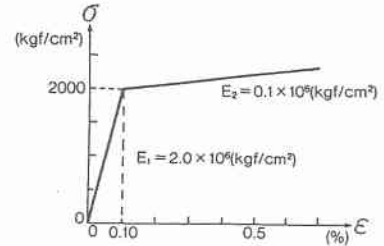
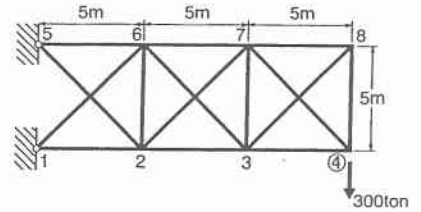
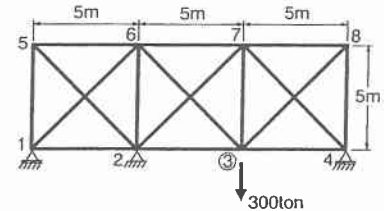


図-1 応力度-ひずみ関係



(A) 15部材トラス



(B) 16部材トラス

図-2 解析モデル

表-1 ラグランジュ乗数 λ^* と可動節点変位 u との比較

着目節点	着目方向	全部材の断面積 (cm)	λ^* (cm)	u (cm)	相対誤差 ¹⁾ (%)	σ_{max} ²⁾ (kgf/cm)
(A) 15部材トラス	鉛直 (↑+)	300.0	-17.37	-17.35	0.12	2500
		400.0	-4.119	-4.116	0.07	1875
		500.0	-3.295	-3.293	0.05	1500
	水平 (→+)	300.0	-3.512	-3.510	0.06	2500
		400.0	-0.8527	-0.8524	0.04	1875
		500.0	-0.6821	-0.6819	0.03	1500
(B) 16部材トラス	鉛直 (↑+)	50.0	-5.321	-5.316	0.09	2673
		70.0	-1.375	-1.374	0.07	1946
		100.0	-0.9627	-0.9622	0.05	1362
	水平 (→+)	50.0	0.2959	0.2965	0.20	2673
		70.0	0.1829	0.1831	0.11	1946
		100.0	0.1280	0.1283	0.23	1362

注. 1) $\left| \frac{\lambda^* - u}{u} \right| \times 100$, 2) 各部材の応力度の最大値

- [参考文献] 1)大久保 他, 土・学・論, 第374号 2)三根 久, オペレーションズ・リサーチ
3)Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., Mechanics of Materials.
4)Ohkubo, S. and Makino, K., Computers & Structures Vol.44, No.1/2.