

エネルギー原理に基づく感度係数を用いない最適設計法の汎用性に関する検討

愛媛大学工学部 正 大久保 禎二 宇部興産(株) 正 ○和多田 康男
(株) 長 大 正 田中 賢太 愛媛大学大学院 学 青野 将也

1. まえがき

著者らは、トラス構造物の線形・非線形最適設計問題に関して、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づき導入したトラス構造物の線形および非線形挙動状態における解析上満足すべき必要条件を、設計上考慮すべき挙動に関する制約条件と同時に考慮するとともに、部材断面積のみならず応力度、変位などの構造物の挙動変数をも独立した設計変数として考慮して非線形トラス構造物の最適化問題を定式化し、この最適設計問題を勾配射影法の手法を用いて解くことにより、挙動変数の感度係数を用いることなく最適解を決定することのできる新しい最適設計法を提案している。ここでは、上記の最適設計法により、種々の応力度-ひずみ関係を有する材料からなるトラス構造物の最適設計を行い、この最適設計法の汎用性について検討を行った結果について述べるものである。

2. エネルギー原理に基づく感度係数を用いない最適設計法の定式化¹⁾

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラス構造物の非線形解析法によれば、トラス構造物の各部材の応力度 σ は、各可動節点における力の釣合方程式 g_j のもとで、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_c(\sigma)$ を最小化することにより決定することができる。すなわち、

$$\text{find } \sigma, \text{ which minimize } \Pi_c(\sigma) = \sum_{i=1}^n \Pi_{ci}(\sigma_i) \quad (1)$$

$$\text{subject to } g_j = P_j - \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (2)$$

ここに、 A_i は部材 i の断面積、 C_{ji} は部材 i の軸力の可動節点変位成分 j への変換マトリックス成分、 P_j は可動節点変位成分 j に作用する外力、 $\Pi_{ci}(\sigma_i)$ は部材 i のコンプリメンタリーエネルギーであり、 n は部材数、 m は自由度の数である。

式(1)、(2)で表わされるトラス構造物の非線形解析問題において、解が満足すべき必要条件を求めるため、式(1)、(2)のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(\sigma, \lambda)$ を導入する。

$$L(\sigma, \lambda) = \Pi_c(\sigma) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\sigma) \quad (3)$$

上式において、 λ_j はラグランジュ乗数であり、式(3)のラグランジュ関数 $L(\sigma, \lambda)$ の停留条件は、次式のように与えられる。

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial \Pi_c(\sigma)}{\partial \sigma_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(\sigma)}{\partial \sigma_i} = 0 \quad (4) \quad \frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda_j} = -g_j(\sigma) = 0 \quad (5)$$

式(4)における $\partial \Pi_c(\sigma) / \partial \sigma_i$ 、 $\partial g_j(\sigma) / \partial \sigma_i$ の値は次式より簡単に求めることができる。

$$\frac{\partial \Pi_c(\sigma)}{\partial \sigma_i} = \varepsilon_i(\sigma_i) A_i \ell_i \quad (6) \quad \frac{\partial g_j(\sigma)}{\partial \sigma_i} = -C_{ji} A_i \quad (7)$$

ここに、 $\varepsilon_i(\sigma_i)$ は部材 i の σ_i に対するひずみ量、 ℓ_i は部材長である。したがって解析上満足すべき必要条件は、式(6)および式(7)を式(4)に、式(2)を式(5)に代入することにより次式のように導入することができる。

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma_i} = \varepsilon_i(\sigma_i) \ell_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ji} = 0 \quad (8) \quad \frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i - P_j = 0 \quad (9)$$

上式におけるラグランジュ乗数 λ_j は可動節点変位成分 j の変位と同一の値となる。したがって、式(8)は可動節点変位および各部材の伸びの適合条件式、式(9)は可動節点変位成分における外力と軸力の釣合方程式となっている。

通常の最適設計問題における各部材の応力度および各可動節点変位に関する制約条件に加えて、式(8)、(9)で示した解析上満足すべき必要条件をも考慮し、 A 、 σ 、 λ を独立変数として取り扱うことにより、トラス構造物の全重量または全製作費 W を最小化する最適設計問題を次のように定式化する。

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & A, \sigma, \lambda, \text{ which minimize } W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i \ell_i \quad (10) \\ \text{subject to} \quad & g_i(\sigma, \lambda) = \varepsilon_i(\sigma_i) \ell_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ji} = 0 \quad g_j(A, \sigma) = \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i - P_j = 0 \\ & g_{\ell k}(\sigma) = \sigma_k - \sigma_{sk} \leq 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad g_{\lambda \ell}(\lambda) = \lambda_{\ell} - \lambda_{s\ell} \leq 0 \quad (\ell=1, \dots, m) \end{aligned}$$

ここに、 ρ_i は部材 i の単位体積重量あるいは単位製作費、また $g_{\ell k}$ 、 $g_{\lambda \ell}$ はそれぞれ部材 k の応力度および可動節点変位成分 ℓ の変位に関する制約条件、 σ_k 、 σ_{sk} はそれぞれ部材 k の実応力度および許容応力度、 λ_{ℓ} 、 $\lambda_{s\ell}$ はそれぞれ可動節点変位成分 ℓ の実変位および許容変位である。

3. 最適設計問題の解法

本研究では、式(10)の非線形最適設計問題を解くため、まず式(10)の線形近似最適設計問題を導入し、その近似最適設計問題を勾配射影法の手法を用いて解き A, σ, λ の改良値 $\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda$ を決定した。このようにして求めた ΔA を用いてトラス構造物の各部材の断面積を改良し、 W および A が一定値に収束するまで改良を繰り返すことにより、最適解 W_{opt} および A_{opt} を決定することができる。

4. 最適設計例

上で述べた方法により、図-1(a)~(d)に示す4種類の線形および非線形な応力度-ひずみ関係を有する材料を用いて図-2の10部材トラスの最適設計を行った結果を表-1に、最適部材配置を図-3に示す。表-1から明らかなように、線形材料(a)の場合、応力制約のみが支配的な制約条件となっている

が、材料(b)~(d)の場合には変位の制約条件が支配的な制約条件となり、最適解において必要となる全ての部材の応力度はそれぞれ2070kgf/cm²、1810kgf/cm²、1110kgf/cm²程度と、 σ_s に対して余裕のある断面となっている。このように使用材料の応力度-ひずみ関係の違いにより、アクティブな制約条件は異なるが、いずれの材料に対しても本研究で提案している最適設計法により確実に最適解が得られている。また最適解を得るために要した計算時間および繰り返し回数はそれぞれ0.3~0.5秒、14~20回と材料の種類による差異はほとんどなく、いずれの線形・非線形材料に関しても安定的に最適解が得られている。

5. 結論

本研究により、エネルギー原理に基づく感度係数を用いないトラス構造物の最適設計法は、いかなる線形および非線形の応力度-ひずみ関係を有する材料に対しても統一的に適用することができ、極めて汎用性のある最適設計法であることが明らかになった。

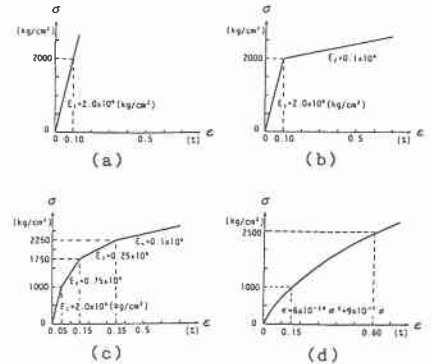


図-1 線形および非線形材料の応力度-ひずみ関係

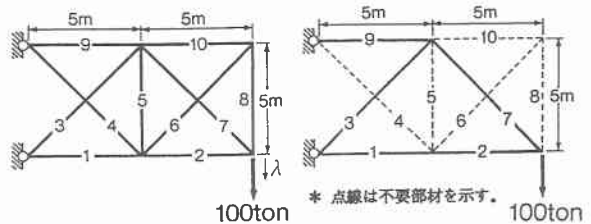


図-2 10部材トラス

図-3 10部材トラスの最適部材配置

表-1 応力度-ひずみ関係が異なる材料の場合の10部材トラスの最適解

材料	3000							
	7.0							
部材番号	断面積 (cm²)	応力度 (kgf/cm²)	面積 (cm²)	応力度 (kgf/cm²)	断面積 (cm²)	応力度 (kgf/cm²)	断面積 (cm²)	応力度 (kgf/cm²)
1	34.0	3002	49.2	2062	55.8	1815	89.9	1121
2	32.7	3002	48.4	2034	54.4	1815	91.2	1038
3	46.2	3001	66.9	2083	77.8	1794	124.6	1126
4	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
5	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
6	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
7	46.3	2998	67.5	2063	76.8	1816	130.0	1080
8	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
9	66.0	2998	94.2	2106	108.9	1825	172.5	1155
10	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
W (kgf)	1056.7		1522.2		1741.4		2823.7	
Δ (cm)	6.0		7.0		7.0		7.0	
CPU TIME (sec.)	0.3		0.5		0.4		0.5	
反復回数	16		18		14		20	
初期値での状態	実行可能		実行可能		実行可能		実行可能	
active/2								
制約条件	応力		変位		変位		変位	

1) 最適解を得るために要した繰り返し回数