

モード解析による構造物の剛性劣化の同定精度について

徳島大学大学院 学生員○団 博成 徳島大学工学部 正 員 平尾 潔
阿 南 高 専 正 員 笹田 修司 松尾橋梁(株) 正 員 袁 紅茵

1. まえがき 本研究では、モード解析を用い、振動実験より得られる比較的 low 次モードから構造物の損傷評価を行う方法として、Two-Step LSE (least-square estimation) 法を提案している。本方法は、第1段階として最小二乗法により損傷前後の剛性変化量 ΔK を求め、これをもとに損傷位置の発見を行い、次に第2段階としてその位置の損傷程度を評価するものである。しかし、この方法では第1段階の損傷位置の発見をいかに精度よく行えるかが問題となるため、この第1段階に二、三の改良を加え、それらの手法の有効性を示すため、6層のせん断型モデルを対象に各手法を用いて解析を行い、その解析結果の比較、検討を行っている。

2. 解析方法 本研究では次式のような自由振動方程式を用いて、解析モデルを扱う。

$$[M] \{\ddot{\Phi}\} + [C] \{\dot{\Phi}\} + [K] \{\Phi\} = \{0\} \quad (1)$$

ここで $[M]$, $[C]$, $[K]$ はそれぞれ質量マトリックス, 減衰マトリックス, 剛性マトリックスを表し, $\{\ddot{\Phi}\}$ は固有振動マトリックス, $\{\Phi\}$ はモード形マトリックスを表す。

また、構造物の減衰は比例減衰とし、次式のようなレーリー減衰とする。

$$[C] = \beta_1 [M] + \beta_2 [K] \quad (\beta_1, \beta_2 = \text{係数}) \quad (2)$$

(1) Two-Step LSE法 まず、(2) 式を (1) 式に代入し、また、損傷後の剛性行列 $[K]$ を $[K] = [K_0] + [\Delta K]$ ($[K_0]$ は損傷前の剛性行列) とし、整理すると損傷前後の剛性変化量 $[\Delta K]$ が次式のように表される。

$$[\Delta K] \{\Gamma\} = \{\theta\} \quad (3)$$

$$\text{ここで} \quad \{\Gamma\} = \beta_2 \{\Phi\} \{\dot{Q}\} + \{\dot{\Phi}\} \quad ; \quad \{\theta\} = [M] (\{\ddot{\Phi}\} + \beta_1 \{\dot{\Phi}\} \{\dot{Q}\}) + [K_0] \{\Gamma\} \quad (4)$$

$[\Delta K]$ は $N \times N$ の行列、 $\{\Gamma\}$ と $\{\theta\}$ は $N \times LM$ の行列である。(N : 自由度; LM : 測定モード次数) しかし、満足に測定できるモード次数はごく低次であり、一般に $N > LM$ となるから、(3) 式から厳密な $[\Delta K]$ を得ることは不可能である。そこで、まず第一段階として最小二乗法を用いて $[\Delta K]$ を次式により近似的に求める。

$$[\Delta K] = \{\theta\} \{\Gamma\}^+ \quad (5)$$

ここで、 $\{\Gamma\}^+$ はシュードインバースマトリックスである。

$$\{\Gamma\}^+ = \{\Gamma\} (\{\Gamma\} \{\Gamma\}^T)^{-1} \quad (T \text{ は転置を表す}) \quad (6)$$

そして得られた $[\Delta K]$ の対角要素の剛性変化率 $\Delta k_{i,i}/k_{0,i,i}$ に注目し、その卓越した要素に接続する部材が損傷しているとみなす。次に、第2段階として、損傷前の剛性行列に第1段階で同定した剛性変化率の卓越した対角要素、並びにその行及び列の非対角要素に剛性劣化の程度を示す未知係数 a_k を乗じたものを損傷後の剛性行列とし、これと実験より得られた振動モードを運動方程式に代入し a_k について解き、損傷後の剛性 $[K]$ を求める。この Two-Step 法では、第1段階でいかに精度よく損傷位置の発見を行えるかが問題であり、以下にこの第1段階に改良を加えた Two-Stage LSE 法と Row-Expanding LSE 法について略述する。

(2) Two-Stage LSE 法 (7) 式から、未知の $LM+1 \sim N$ 次モードを近似計算によって求め、 $1 \sim LM$ 次の測定モードと $LM+1 \sim N$ 次の推定モードを用い、損傷位置の発見を行う方法である。

$$\begin{aligned} \{x\}_r^T [M] \{x\}_s &= 0 \quad ; \quad r=1 \sim LM \\ \{x\}_s^T [M] \{x\}_s &= 1 \quad ; \quad s=LM+1 \sim N \\ 2\xi_s \omega_s &= \beta_1 + \beta_2 \omega_s^2 \quad ; \quad \xi: \text{減衰率} \quad \omega: \text{固有振動数} \end{aligned} \quad (7)$$

(3) Row-Expanding LSE 法 剛性行列中の 0 要素は損傷前後で変化しないことに注目し、0 要素を第1段階の未知数からあらかじめ省き、未知数を減らした上で損傷位置の発見を行う方法である。すなわち(3) 式の

[AK]から0を省いたものを行ベクトル{AK}に展開し、その他の項をこれに合わせて変形すると、次式が得られる。

$$[B]\{AK\}=\{Z\} \quad (8)$$

これをシュードインバースマトリックスを用いて解くと次のようになる。

$$\{AK\}=[B]^{-1}\{Z\} \quad (9)$$

3. 解析結果 図1に示すような6層のせん断型モデルにおいて第1層と2層にそれぞれ40%,20%剛性劣化があるものとして同定を行う。図2～6は各手法によって求めた対角要素iの剛性変化率 $\Delta k_{ii}/k_{0,ii}$ を示したものである。図2はTwo-Step法において振動モードが1次まで測定されたときの第1段階の解析結果であり、図3は2次まで測定されたときの解析結果である。1次モードのみを用いた図2からは対角要素6に接続する要素が損傷しているようにみなされるが、これは仮定と異なり、1次モードのみからの同定は不可能なことがわかる。一方、2次モードまで用いた図3からは対角要素1,2,3,6の剛性変化率が卓越している。そこで、第2段階として損傷後の剛性行列を次式の様に仮定する。

$$[K(a^*)]=\begin{bmatrix} a_1k_{011} & -a_2k_{012} & & & & \\ & a_3k_{022} & -a_4k_{023} & & & 0 \\ & & a_5k_{033} & -a_6k_{034} & & \\ & & & a_7k_{044} & -k_{045} & \\ & \text{SYM} & & & a_8k_{055} & -a_9k_{056} \\ & & & & & a_{10}k_{066} \end{bmatrix} \quad (10)$$

この(10)式の未知数は $a_1 \sim a_{10}$ の10個であり、一方、運動方程式の数は $2 \times 6 = 12$ 個であるから $a_1 \sim a_{10}$ すなわち損傷後の剛性が正確に求まることになる。

次に、図4はTwo-Stage法を用いて1次の測定モードだけから同定した結果である。対角要素1,5,6の剛性変化率が卓越しており、2段階の未知数の総数は8個となり、図3の場合より少ないが運動方程式の数が $1 \times 6 = 6$ であるからこの場合、正確な同定はできない。一方、図5の2次モードまで用いた場合、未知数の数は同数であるが方程式の数が12であるため、正確な同定が可能である。最後に、図6はRow-Expanding法を用いて1次モードのみから解析した結果である。一見して、本方法では他の方法に比べ精度よく損傷位置が発見できることがわかる。なお、剛性劣化を直接同定するOne-Step法では剛性行列の対称性を考慮しても4次までの測定モードが必要である。

4. まとめ 本研究で提案したTwo-Step法はOne-Step法に比べ、低次の測定モードから剛性劣化の同定が可能であり、せん断型モデルではRow-Exp.法を適用することにより1次の測定モードのみから損傷後の剛性を知ることができる。

5. 参考文献 袁紅茵: Modal Analysis Inspection For Damage Assessment of Structures, 徳島大学大学院工学研究科博士学位論文, 1995.3 (英文)

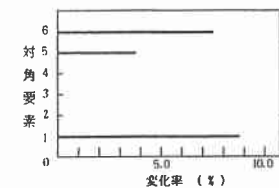


図4. Two-Stage (1次)

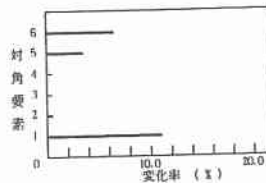


図5. Two-Stage (2次)

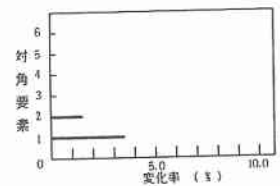


図6. Row-Exp. (1次)

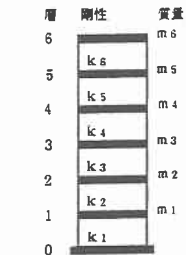


図1. 解析モデル

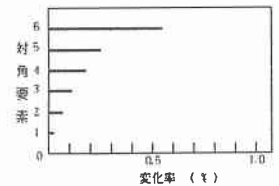


図2. Two-Step (1次)

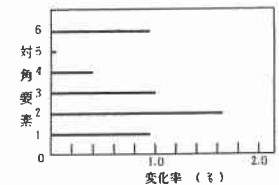


図3. Two-Step (2次)