

完全陰的不連続変形法の接触項の組み立て処理の並列化

広島大学 学生会員 ○徳田 樹
 広島大学 正会員 橋本 涼太

1. 背景と目的

従来、原子力発電所周辺の岩盤斜面の地震時安全性は有限要素法を用いた等価線形解析で得られた応力状態に基づく瞬時的なすべり安全率で評価されているが、設計に用いられる入力地震動レベルが増大する中で従来のように斜面のすべり安全率に基づく崩壊の有無で安全性を評価することは、過度に保守的で不経済な設計となり得る。また、大規模地震による岩盤斜面の崩壊が起こった際には、崩壊後の岩塊が構造物に衝突する危険性があることまで考慮し、斜面の残留変位量や崩落した岩塊の動的挙動を評価することが近年求められている。本研究では、崩壊後の岩塊の挙動も解析可能な不連続体解析手法である不連続変形法（Discontinuous Deformation Analysis : DDA）を改良した完全陰的DDA（Full implicit DDA）¹⁾に着目して、並列化に適した接触処理アルゴリズムとOpenMPによる並列計算を導入し計算速度と精度の向上を図った。開発手法で導入した並列化時の接触処理アルゴリズムの性能の検証のため既往の多層ブロック斜面モデルの振動解析を行った。

2. 開発手法概要

a) 完全陰的DDAの概要

二次元問題を対象として、 n 個の独立した連続体からなる系を考える。各連続体が空間内を占める領域を Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$)、 Ω_i の境界を $\Gamma_i (= \Gamma_{iu} \cup \Gamma_{io}, \Gamma_{iu}$: 変位境界, Γ_{io} : 応力境界) とする。この時、個々の物体 Ω_i の運動・変形は、次に示す連続体の運動方程式、

$$\rho_i \ddot{\mathbf{u}}_i - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i - \bar{\mathbf{b}}_i = 0 \quad (1)$$

ひずみの適合条件式、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{u}_i + (\nabla \mathbf{u}_i)^T \right\} \quad (2)$$

増分形の構成関係式、

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D}_i : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (3)$$

といった基礎式に加えて、変位境界条件、

$$\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i \quad \text{on } \Gamma_{iu} \quad (4)$$

および応力境界条件、

$$\mathbf{t}_i = \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{n}_i = \bar{\mathbf{t}}_i \quad \text{on } \Gamma_{io} \quad (5)$$

によって記述される。ここで、下付添字 i は物体 Ω_i の物理量、変数の上のドット(\cdot)とバー($\bar{\quad}$)は物質時間微分と既知量を表す。 ρ は密度、 \mathbf{u} は変位ベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}$ はCauchy 応力テンソル、 \mathbf{b} は物体力ベクトル、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は微小ひずみテンソル、 \mathbf{D} は4階の構成関係テンソル、 \mathbf{t} は表面力ベクトル、 \mathbf{n} は物体表面に対する外向き単位法線ベクトルを示す。ここに、 Γ_{iu} と Γ_{io} はそれぞれ Ω_i の変位境界と応力境界であり、 $\Gamma_i = \Gamma_{iu} \cup \Gamma_{io}$ かつ $\Gamma_{iu} \cap \Gamma_{io} = \emptyset$ である。 $\bar{\mathbf{u}}_i$ は変位境界 Γ_{iu} 上での既知変位、 \mathbf{n}_i は境界面での外向き単位法線ベクトル、 $\bar{\mathbf{t}}_i$ は応力境界 Γ_{io} に作用する既知の表面力ベクトルである。ここで式(1)~(5)の境界値問題の弱形式を重み付き残差法で導くと以下ようになる。

$$G_i^{ext,int} = \int_{\Omega_i} (\rho_i \dot{\mathbf{u}}_i) \cdot \delta \mathbf{u}_i d\Omega + \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\sigma}_i : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i d\Omega - \int_{\Gamma_{io}} \bar{\mathbf{t}}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i d\Gamma - \int_{\Omega_i} \rho_i \bar{\mathbf{b}}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i d\Omega = 0 \quad (6)$$

次に、 Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$)のうち、 Ω_j と Ω_k ($j \neq k$)がその界面 Γ_{jk} で接触している場合、接触力は界面 Γ_{jk} では法線方向の互いの距離がゼロであるという条件、

$$g_N = 0 \quad \text{on } \Gamma_{jk} \quad (7)$$

に加え、接触面における表面力が釣り合うという条件、

$$\mathbf{t}_j + \mathbf{t}_k = 0 \quad \text{on } \Gamma_{jk} \quad (8)$$

を満たす必要がある。ここで、 g_N は二物体間の界面法線方向の距離（法線ギャップ）である。ここに式(3.8)の接触面における表面力を界面 Γ_{jk} に対する法線成分 t_N と接線方向 t_S に分解する。さらに、それぞれに法線ギャップ g_N と界面 Γ_{jk} に対する接線方向のギャップ g_S に対応する仮想変位を乗じ、界面 Γ_{jk} に関して積分を行うと、接触力による仮想仕事は、

キーワード DDA, 並列化, 地震, 安定性評価

連絡先 〒739-8527 広島県東広島市鏡山一丁目4番1号 A2-521

TEL 082-424-7784

$$G_{jk}^c = \int_{\Gamma_{jk}} t_N \delta g_N d\Gamma + \int_{\Gamma_{jk}} t_S \delta g_S d\Gamma \quad (9)$$

として表すことができる。

物体間に接触が生じている場合、物体は外力と内力による仮想仕事式(式(6))に加え、接触力による仮想仕事の和がゼロであるという条件を満たす必要があるため、系全体で解くべき弱形式は次のように表される。

$$G = \sum_{i=1}^n G_i^{\text{ext, int}} + G_{jk}^c = 0 \quad (10)$$

なお、式(10)の弱形式に用いられる接触力の法線成分 t_N と接線成分 t_S は未知数であり、ペナルティ法で正則化を行う。また、接触力のせん断成分にはクーロン則を適用し、摩擦力の更新法にリターン・マッピング法を導入した。こうして得られた摩擦構成則を含む非線形方程式をNewton-Raphson法により線形化した後に、空間・時間離散化することで剛性方程式を導く。ここで、 n 個の物体からなる解析対象全体として解くべき方程式は、

$$\begin{pmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & \cdots & [K_{1n}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & \cdots & [K_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K_{n1}] & [K_{n2}] & \cdots & [K_{nn}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\Delta d_1\} \\ \{\Delta d_2\} \\ \vdots \\ \{\Delta d_n\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \vdots \\ \{F_n\} \end{pmatrix} \quad (11)$$

となる。ここで、 $[K_{ij}]$ は 6×6 のマトリックスで、 $\{\Delta d_i\}, \{F_i\}$ は 6×1 のベクトルである。 $[K_{ii}]$ はブロック i の物性と接触条件から定まり、 $[K_{ij}] (i \neq j)$ はブロック i と j の接触状態のみから計算されるサブマトリックスである。また、 $\{F_i\}$ は外力と内力、接触力の合力からなる残差力ベクトルである。

次に述べる並列計算の導入に先立って、以上に示した完全陰的DDAの課題を整理する。完全陰的DDAはDDAにおける時間増分毎の摩擦力更新に弾塑性論のアナロジーに基づくリターン・マッピング法を導入することで不連続性岩盤の滑り挙動を高精度に解析可能にした手法である。また、同手法はリターン・マッピング処理が行われる場合、不連続面に作用する摩擦力の修正により系全体の力学的平衡条件に残差が生じるため、Newton-Raphson法による収束計算も導入した。そのため、従来のDDAと比べても大きな時間増分でも精度よく解析できるようになったものの、一つの時間ステップの中で連立一次方程式を解く回数が増え、解析全体に占める連立一次方程式の組み立てと求解にかかる時間の割合が増加している。特にブロック数の多い大規模斜面を対象とした解析においてはこれにより計算時間全体の増加が著しくなり、実用上利用が難しくなる。

b) 並列計算概要

並列計算とはプログラムを構成するアルゴリズムの中で相互に独立している処理を複数の演算装置(Central Processing Unit: CPUやGraphics Processing Unit: GPU)に分割し、同時に実行することで高速化する手法である。従来のDDAにおいては、Yuら²⁾がOpen Multi-Processing (OpenMP)によりスレッド並列化を行い解析実行時間の短縮に成功している。これを踏まえて、本研究ではOpenMPによる高速化が完全陰的DDAでも有効であると判断し、導入を行った。

c) 剛性方程式の接触項の組み立て処理の並列化

本研究では、主に剛性方程式の接触項の組み立て処理に着目し、並列計算の導入を行った。完全陰的DDAの全体剛性方程式は、個々のブロックの質量および剛性マトリックスと内力、外力ベクトル、ブロック間の接触による接触ペナルティマトリックスと接触力ベクトルによって構成される。DDAではブロック間の相互作用は接触項のみによって考慮されるので、全体剛性方程式の中で質量マトリックスと剛性マトリックス(式(11)の $[K_{ii}]$)、内力および外力(物体力)ベクトル(式(11)の $\{F_i\}$)の保存位置はブロックごとに独立している。そのため、ブロックごとの反復処理を容易に並列化できる。

続いて、接触ペナルティマトリックスおよび接触力ベクトルの計算を並列化する。DDAでは接触状態や貫入量、せん断変位といった情報を接触する頂点と辺のペア(以降、接触ペアと呼ぶ)ごとに格納しているため、接触ペナルティマトリックスや接触力ベクトルも接触ペアごとに計算した後、全体剛性方程式に重ね合わせている。ここで、接触ペアに関する並列化を行うと、ブロックが複数の接触点を有する場合、複数のスレッドから同時にそのブロックの接触ペナルティマトリックスや接触力ベクトルへの足し合わせが起こる可能性があり、排他処理が必要となる。これをYuらはOpenMPのatomic指示文によって実現している(図1)が、一般に

```
#pragma omp parallel for
for each contact ci = 1:cn
  Compute intermediate variables
#pragma omp atomic
  Add terms to [Kii], [Kjj], [Kij], [Kji], {Fi} and {Fj}
```

図1 Yuらが実装した剛性方程式の接触項の組み立ての並列化の疑似コード²⁾

atomic操作を行うと同期処理が発生するため並列性能が低下しやすい。また、並列化した際に、マトリックスやベクトルを全体剛性方程式に重ね合わせる際の接触ペア間の順序がプログラムを実行する度、あるいはスレッド数を変える度に变化するため、丸め誤差により演算結果に差異が生じる。このような場合、複数回同じ解析を行って結果の妥当性を検証することになり、実際上並列計算による高速化の利点が低下する。

これに対し、本研究ではブロック単位で接触処理をまとめて実行する新しいアルゴリズムとその並列化手法を提案する。まず、従来通り、接触検索である時間ステップで接触する可能性のある全接触ペアをリストアップする。その後、各ブロックについて自身が関係する接触ペアへのインデックスを作成しておく(図2)。そして、ブロックごとにインデックスに登録された接触ペアの接触ペナルティマトリックスと接触力ベクトルを計算し、全体剛性マトリックスへと重ね合わせる。なお、マトリックスとベクトルの計算時には接触ペアの頂点側のブロックと辺側のブロックに関してそれぞれ計算すればよいため、ブロック間で処理が重複することはない。よって、並列化する際にもブロックごとに各スレッドに割り当てれば、データ依存性が生じないためatomic処理を用いずに実装でき、スレッド数を変更しても全体剛性マトリックスの各項への重ね合わせ順序が変化せず、丸め誤差の影響を抑制できると考えられる。

しかしながら、上記のアルゴリズムを効率的に並列化するためには、各スレッドに担当させる要素の割り

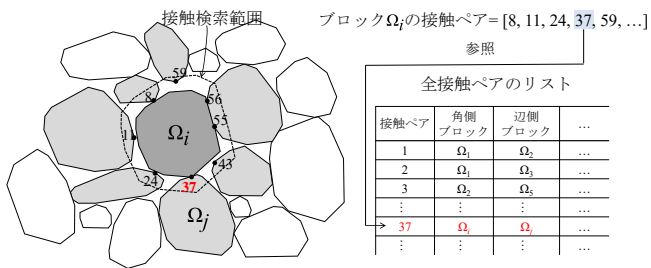


図2 ブロックごとの接触ペアのインデックス作成概要

```
#pragma omp parallel for
for each block i = 1:n
  Thread equalization of operations
  Compute intermediate variables
  Add terms to  $[K_{ii}], [K_{jj}], [K_{ij}], [K_{ji}], \{F_i\}$  and  $\{F_j\}$ 
```

図3 開発手法における剛性方程式の接触項の組み立ての並列化の疑似コード

当て方法に留意する必要がある。というのは、DDAでは解析の過程でブロックごとに他ブロックとの接触ペア数に変化するが、接触ペア数に偏りがある場合、並列化した際にスレッド間で担当する計算量の不均衡が生じ、並列性能が低下するためである。よって、本研究では各ブロックが有する接触ペア数を考慮して、各スレッドが担当する全接触ペア数のばらつきが小さくなるようブロックを割り当てる処理を合わせて実装した(図3)。これにより、スレッド間の計算負荷を極力均等にし、並列化効率の低下を防ぐことができると考えられる。

3. 開発手法の妥当性と並列化性能の検証

開発手法の妥当性と並列化性能の検証のため、Irieら³⁾を参考にした多層ブロック斜面モデルの振動解析を行った。図4に使用した解析モデルと材料物性値および解析上のパラメータ¹⁾を示す。解析は、自重载荷と加振の二段階であり、準静的条件で1秒間自重のみを作用させた後、基盤ブロックに最大振幅 5 m/s^2 で周波数 2 Hz の正弦波形の水平加速度を積分した変位を入力し、上部の斜面の動的挙動を解析する。なお、従来の完全陰的DDA(以降、従来手法)による解析に加え、接触項をブロック単位で処理した開発手法と接触ペア単位で処理した場合においてそれぞれ並列スレッド数を1, 2, 3, 4とした計9パターンで解析を実行した。

まず、開発手法の妥当性の検討のため従来手法と開発手法(1スレッド)を用いた解析の比較を行う。多層ブロック斜面モデルの崩壊進展を図5に示す。図より、従来手法と開発手法は共に、1.70秒地点で基盤ブロックの表面に沿ってすべり始め、2.40秒地点ではブロックが転倒する形で崩壊を始める。その後の崩壊形態は多少のずれがありながらも全体的に概ね一致した形を保ちながら崩壊する。ここで、斜面全体として見た変位挙動は整合していることから、開発手法の妥当性が検証

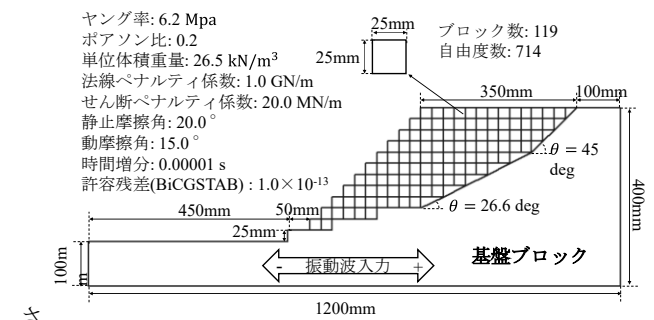


図4 多層ブロック斜面の解析モデル(文献3)を元に作成)と振動解析用パラメータ(文献1)に追記)

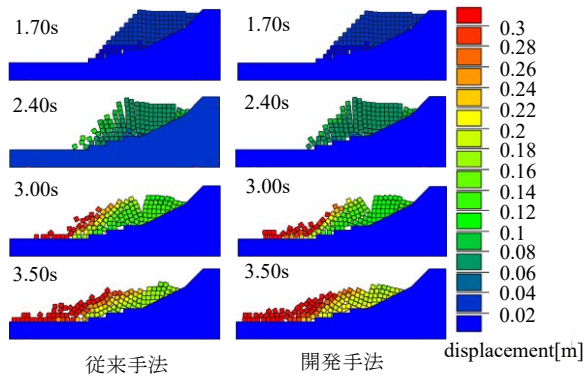


図5 多層ブロックモデルの崩壊進展

れた。なお、結果が厳密には一致しないのは並列化にあたり導入した連立方程式解法の違いに起因する⁴⁾。

次に、剛性方程式組み立て時のブロック単位での接触処理およびその並列化アルゴリズム（図3）の性能検証のため、接触ペアごとに接触項の組み立て処理と並列化（図1）を行った解析との比較検証を行った。図6に接触項の組み立て処理を接触ペア単位で行ったもの（図6左）とブロック単位で行ったもの（図6右）による3.00秒時点の崩壊状況をスレッド並列数ごとに示す。ブロック単位で組み立て処理を行った解析手法においては、スレッド数によらず、等しい解析結果を示しているのに対し、接触ペア単位で組み立て処理を行った解析ではスレッド数によって結果が異なるのがわかる。このことから、開発手法の接触処理アルゴリズムの導入により、丸め誤差の影響を抑制し、スレッド並列数によらず一定の解析結果を得られることが確認できた。

つづいて、並列性能を比較するため、図7に接触項の組み立て処理の実行時間を、接触ペア単位および開発手法（ブロック単位）それぞれで処理・並列化した場合についてスレッド並列数ごとに示す。速度向上率を見ると、接触項の組み立て処理はいずれのアルゴリズムを用いた場合も4スレッド時に約3倍という高い並列性能を保持していることが確認できる。しかしながら、所要時間を比較すると、1スレッド時では本研究で提案したブロック単位のアルゴリズムは約370秒、接触ペア単位のアルゴリズムは約540秒と、前者が約1.46倍速くなっている。スレッド数が大きくなっても、ブロック単位の処理アルゴリズムが常に高速であった。この違いは、接触ペア単位の並列化で採用されているatomic処理に起因すると考えられる。atomic処理は複数のスレッドから同時に同じ変数への書き込みが起らないように排他処理を行う。よって変数の値を更新する際には他の

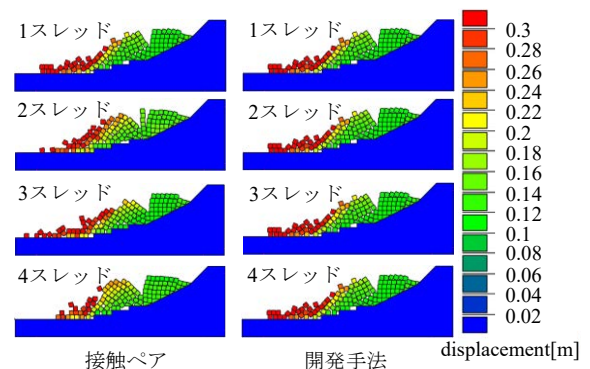


図6 接触項の形成方法による崩壊進展への影響（3.00s時）

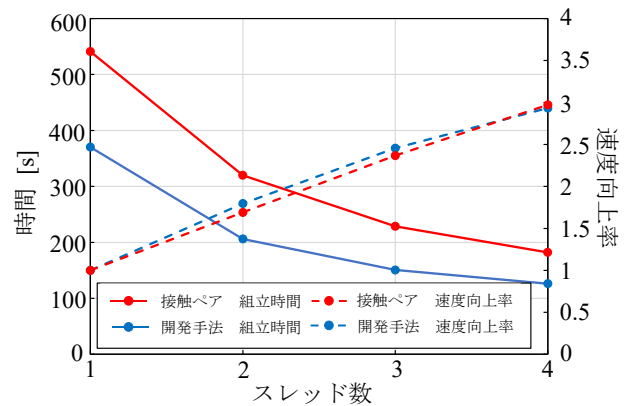


図7 接触項の組み立て時間

スレッドからのデータの保護や更新後の解放といった処理が内部的に増加してしまう。そのため、接触項をブロック単位で組み立て、並列化した開発手法のほうが高速に処理できたと考えられる。

4. 結論

本研究では、完全陰的 DDA をベースに並列化に適した接触項の組み立てアルゴリズムと OpenMP によるスレッド並列化を導入した新たな手法を開発・実装した。開発手法を用いて、多層ブロック斜面モデルの振動解析を実施し、その妥当性と並列性能を検証した。今後、本手法を用いて大規模不連続性岩盤斜面の安定性評価についての検討を進める。

参考文献

- 1) Hashimoto, 他 2 名 : Rock Mech. Rock Eng., Vol. 54, pp. 4239-4263, 2021.
- 2) Yu, 他 4 名 : International Journal of Geomechanics, Vol. 20, No. 7, pp. 04020083-1-04020083-14, 2020
- 3) Irie, 他 4 名 : Geomechanics and Geoengineering, Vol 7, pp. 57-68, 2012.
- 4) 徳田, 橋本: 第 57 回地盤工学研究発表会, 2022. (投稿中)