DDA と VOF 法を用いた固体—流体連成解析手法の開発

広島大学　学生会員　○上園　浩志
広島大学　正会員　橋本　涼太

1．背景と目的

近年，巨礫を含む土石流により構造物が損壊する事例が確認され，巨礫の影響を考慮した砂防施設の設計の重要性が高まっている．現在の技術指針では，土石流中の巨礫が砂防堰堤袖部に与える衝撃力を，巨礫の速度が土石流流速と同じと仮定して算出している．しかし，土石流中の巨礫は，斜面との間の摩擦，巨礫同士の衝突，土石流による流体力と相互作用しながら流下するため，エネルギーロスにより土石流のみが流下する場合に比べ，礫の流下速度が低下する可能性がある．そこで本研究では，土石流中の巨礫の影響を考慮した砂防堰堤の設計の実現を目的とし，その力学挙動を明らかにするための固体－流体連成解析手法を開発した．

固体解析には，不連続性岩盤の動的解析に用いられる不連続変形法（DDA: Discontinuous Deformation Analysis）を採用した．流体解析には，比較的圧力の計算精度と安定性の高い格子法ベースの手法である VOF（Volume of Fluid）法を用いた．また，DDA でモデル化した固体による流れ場への影響は埋め込み境界（IB: Immersed Boundary）法で，流体力による固体の移動は固体表面に流体圧力を分布荷重として与えることで両者を連成した（図 1）．

そして，開発した解析手法の妥当性を検証するための解析を実施した．

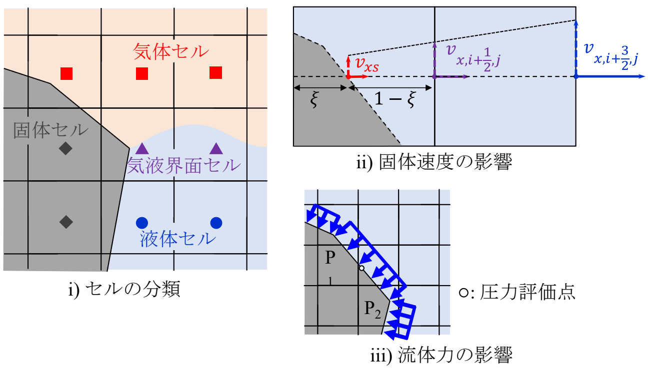

図 1 埋め込み境界法の概要

2．開発手法の概要

a）DDA の概要

2 次元問題を対象とし，n個の独立した連続体からなる系において，各連続体が空間に占める領域をΩ_i $(i=1,2,\dots,n)$, Ωの境界をΓ_i $(=\Gamma_{iu}\cup\Gamma_{i\sigma}$, Γ_{iu}：変位境界, $\Gamma_{i\sigma}$：応力境界）とする．

個々の物体Ω_iの運動・変形は，連続体の運動方程式,

$$\rho_i \ddot{\boldsymbol{u}}_i - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i - \rho_i \bar{\boldsymbol{b}}_i = 0 \qquad (1)$$

ひずみの適合条件式,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{1}{2}\left\{\nabla \boldsymbol{u}_i + \left(\nabla \boldsymbol{u}_i\right)^{\mathrm{T}}\right\} \qquad (2)$$

増分形の構成関係式,

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{D}_i : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i \qquad (3)$$

で表される．ここで下付き添字iは物体Ω_iの物理量，変数の上のドット（・）とバー（—）は物質時間微分と既知量を表す．ρは密度，$\boldsymbol{u}$は変位ベクトル，σは Cauchy 応力テンソル，$\boldsymbol{b}$は物体力ベクトル，$\boldsymbol{\varepsilon}$は微小ひずみベクトル，$\boldsymbol{D}$は4階の構成関係テンソルである．また，求めるべき変位場は変位境界条件，および応力境界条件を満たす必要があり，境界値問題の弱形式を重み付き残差法で導くと以下のようになる．

$$G_i^{ext,int} = \int_{\Omega_i} \rho_i\, \ddot{\boldsymbol{u}}_i \cdot \delta\boldsymbol{u}_i d\Omega + \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\sigma}_i : \delta\boldsymbol{\varepsilon}_i d\Omega$$

$$-\int_{\Gamma_{i\sigma}} \bar{\boldsymbol{t}}_i \cdot \delta\boldsymbol{u}_i d\Gamma - \int_{\Omega_i} \rho_i\, \bar{\boldsymbol{b}}_i \cdot \delta\boldsymbol{u}_i d\Omega = 0 \quad (4)$$

2 つの連続体Ω_j，Ω_kがその界面Γ_{jk}で接触する時，各物体の運動と変形は式(4)で表されるが，このときΓ_{jk}では法線ギャップg_Nは 0 で，表面力が釣り合う以下の条件(5)，(6)を満たす必要がある．

$$g_N = 0 \quad \text{on } \Gamma_{jk} \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{t}_j + \boldsymbol{t}_k = 0 \quad \text{on } \Gamma_{jk} \qquad (6)$$

式(6)での表面力すなわち接触力を接触面の法線方向t_Nと接線方向t_Sに分解し，法線ギャップg_Nとせん断変位g_Sに対応した仮想変位を乗じてΓ_{jk}に関して積分すると，

キーワード　DDA，VOF 法，巨礫，土石流
連絡先　〒739-8527　広島県東広島市鏡山一丁目 4 番 1 号　A2-521
ＴＥＬ080-2713-2796

$$G^c_{jk} = \int_{\Gamma_{jk}} t_N \delta g_N \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{jk}} t_S \delta g_S \, d\Gamma \qquad (7)$$

が得られる．接触が生じている場合，物体はその外力と内力による仮想仕事（式(4)）に加え，接触力による仮想仕事の和がゼロである必要があるため，系全体で解くべき弱形式は次式となる．

$$G = \sum_{i=1}^{n} G_i^{\text{ext, int}} + G^c_{jk} = 0 \qquad (8)$$

こうして得られた弱形式をペナルティ法で正則化し，その線形化方程式を空間・時間離散化することで最終的な剛性方程式を得る．なお，接触力のせん断成分，すなわち摩擦にはクーロン則を適用し，摩擦力の更新法にリターン・マッピング法を，非線形方程式の求解にはNewton-Raphson 法を使用した[1]．

b）VOF 法の概要

VOF 法に使用する基礎式は連続式，

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (9)$$

や Navier-Stokes 式，

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = g - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \nu \Delta \boldsymbol{v} \qquad (10)$$

によって記述される．ここに，v_xはx方向流速，v_yはy方向流速（ただし$\boldsymbol{v}$は速度ベクトル），gは重力加速度，ρは流体の密度，pは圧力，νは動粘性係数を表す．VOF 法ではこれらに加え，液相と気相を区別するための相定義関数，

$$\chi(x,y) = \begin{cases} 1 & （液相） \\ 0 & （気相） \end{cases} \qquad (11)$$

を定義し，$\chi(x,y)$の値を微小領域内で面積平均した VOF 関数，

$$F = \frac{1}{\Omega} \iint_{\Omega} \chi(x,y) \, dx \, dy \qquad (12)$$

(12)の移流方程式，

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v}F) - F \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \qquad (13)$$

が用いられる．本研究では気体と液体を同時に扱う気液二相流れの VOF 法を用いて，空間離散化にはスタッガード格子を用いた有限差分法（FDM: Finite Difference Methods）で，圧力計算はフラクショナル・ステップ法で行い，VOF 関数値の移流にはドナー・アクセプタ法を用いた．また，VOF 関数値の移流に伴い生じる数値拡散を抑えるための界面再構築法として，WLIC 法[2]を採用した．WLIC 法ではあるセル(i,j)内の点(x,y)における相定義係数$\chi_{i,j}(x,y)$を式(14)のように仮定する．

$$\chi_{i,j}(x,y) = \omega_{x,i,j}(\boldsymbol{n}_{i,j})\chi_{x,i,j}(x,y) + \omega_{y,i,j}(\boldsymbol{n}_{i,j})\chi_{y,i,j}(x,y) \qquad (14)$$

ここに，$\omega_{x,i,j}$，$\omega_{y,i,j}$は重み関数，$\chi_{x,i,j}$はセル内の界面がy軸と平行であると仮定した場合の相定義関数，$\chi_{y,i,j}$はセル内の界面がx軸と平行であると仮定した場合の相定義関数である（**図 2**）．ここで周囲のセルの VOF 関数値を考慮した巨視的な界面の法線ベクトルの向きを用いて，セル内の界面がx軸あるいはy軸と平行であると仮定したときの相定義関数を重み付き平均することで相定義関数を再定義している．

c）IB 法による両解析の連成

DDA と VOF 法の相互作用解析の実現にあたり，固定格子上で計算される流れ場とラグランジュ的に運動する固体の間の連成のため，本研究では水谷らのスタッガード格子の利用を前提とした IB 法[3]を用いた．

図 1 i)のように各セルを分類したうえで，固体による流れへの影響は，固体の表面と，流速評価点どうしを結ぶ線分の交点における固体の速度と，一つ隣の流速評価点の流速を補間して固体－流体境界における流速評価点の流速を決定し，境界条件として与える（**図 1** ii)）．

一方，流体力による固体の運動は，DDA でモデル化した固体表面における流体の圧力を外力として作用させる．多角形で表される DDA ブロックの各辺に対して内向き法線方向に流体圧力が分布荷重に働くものと仮定し，各辺には辺の中点が位置するセルの圧力を均一に与える（**図 1** iii)）．

以上の処理を時間増分ごとに VOF 法と DDA を交互に計算しながら行い，相互作用解析を可能にした．

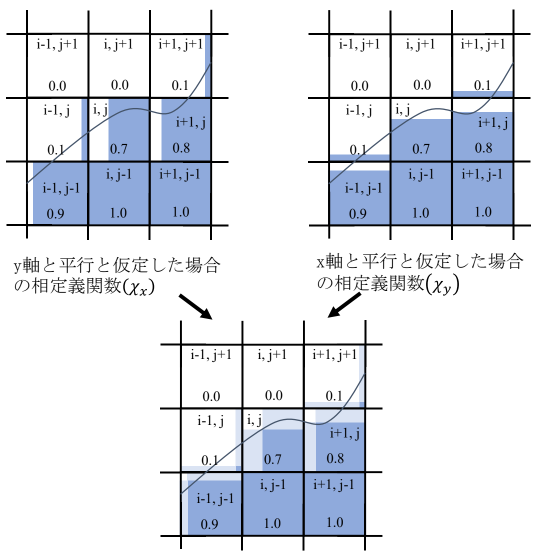

図 2 WLIC 法[2]による界面再構築

３．開発手法の妥当性検証

a）円柱周りの流れの解析

開発手法の連成処理の妥当性を検証するため円柱周りの流れの解析を実施した．解析モデルと物性値，境界条件を**図 3** に示す．液相の密度は一定のまま，動粘性係数を変えて，Reynolds 数を変化させた 6 ケースを実施した．1 ステップ当たりの時間増分を 0.0005 s として，各ケース流れ場が安定するまで解析を実施した．

図 4 に流体の圧力分布の変化を示す．Re=80 のとき，円柱前面には正，後方には負の圧力が加わっており，5 s 以降ほとんど変化は見られない．Re=800，8000 においても 20 s までは同様に円柱前面に正，後方に負の圧力が加わり，また，Re=8000 の場合は圧力差がよりはっきり表れた．75 s 時点では，Re=800 で円柱後方の低圧部が非対称になり，Re=8000 の場合は低圧部が交互に現れた．100 s まで進むと Re=800，8000 の場合ともに円柱後方で圧力の低い部分が交互に生じるカルマン渦が確認され，また，Reynolds 数の大きい Re=8000 ではより速い段階でカルマン渦を生じた．

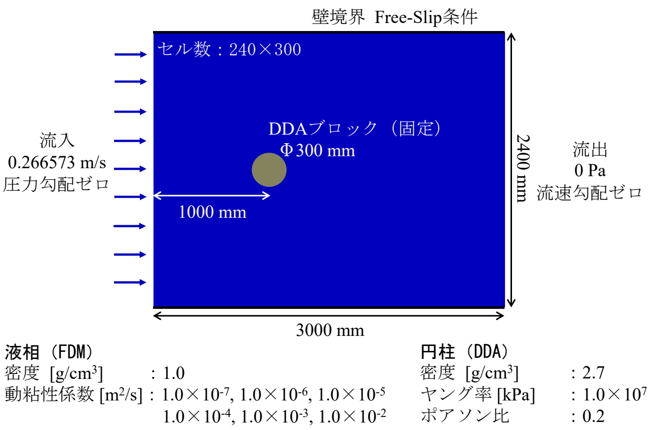

図 3 円柱回り流れ解析モデル

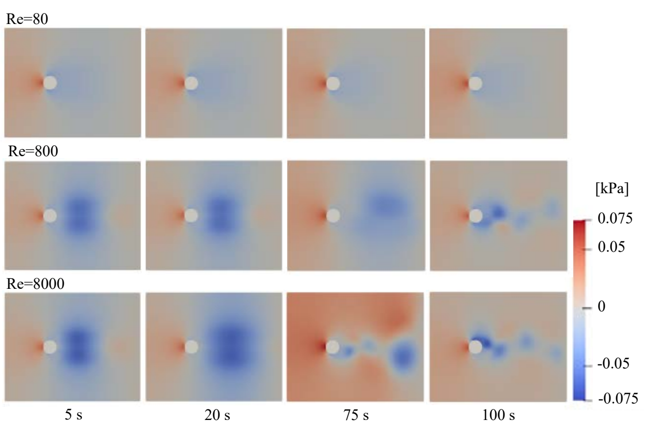

図 4 円柱回り圧力分布の時間変化

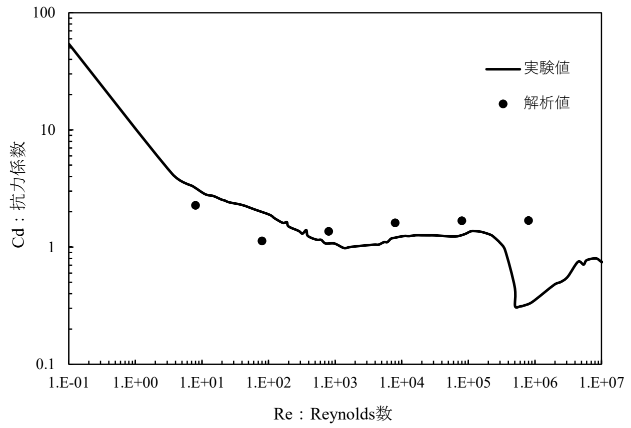

図 5 円柱回り流れにおける抗力係数の比較 4)

図 5 に Reynolds 数と円柱周りの流体圧力から計算した抗力係数 C_D の計算結果を実験結果 4)とともに示す．$Re<10^3$ の範囲では解析結果と実験結果ともに Reynolds 数の増加に伴い抗力係数が低下するが，解析結果の方が実験値より低い値となった．$Re<10^3$ の範囲では円柱周囲に働く摩擦抗力の影響が大きく，Reynolds 数の増加に伴い圧力抗力が優位となり，$10^3<Re<10^5$ では主流の流れが安定して円柱表面の圧力が Reynolds 数によらず抗力係数はほぼ一定となる．これに対して，**図 5** に示した解析値は摩擦抗力を考慮していないため，$Re<10^3$ の範囲では実験値より小さくなった．一方，Re=800 より高い Reynolds 数では解析値が実験値より大きくなった． Reynolds 数が大きくなると円柱後方にはカルマン渦が生じる．本来，カルマン渦は 3 次元的に広がるのに対し，本解析は 2 次元解析であるため円柱の軸方向に渦は広がらない．そのため，流体力が増え，高 Reynolds 数領域で抗力係数が大きくなったと推察される．

b）ダムブレイク流れの解析

次に自由水面解析の妥当性検証のために，ダムブレイク流れの解析を行い，実験結果 5)との波形の比較を行った．解析モデルと物性値，境界条件を**図 7** に示す．1 ステップ当たりの時間増分は 0.00005 s とした．

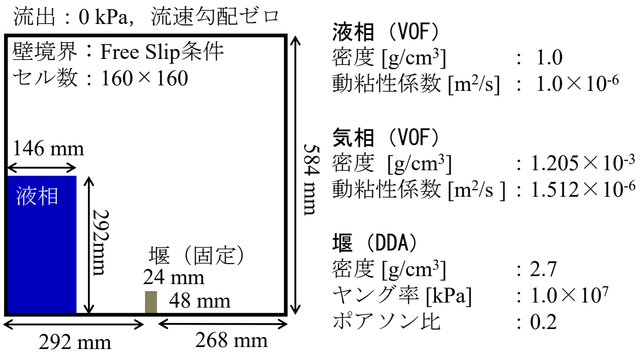

図 6 ダムブレイク流れの解析モデル

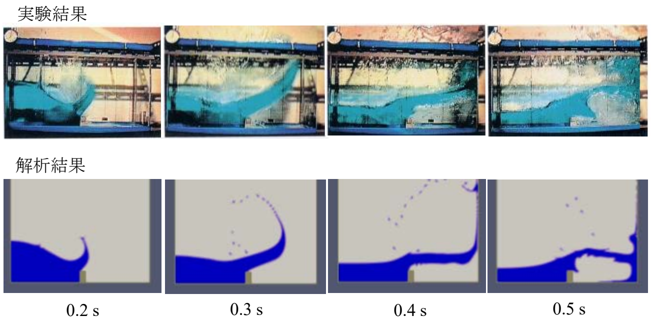

図7 ダムブレイク流れ解析結果と実験結果[5]との比較

図7に解析結果を示す．0.2 s，0.3 s 時点では，解析結果と実験結果ともに，障害物の影響で段波が大きく変化し，液相が斜め上方向に細長く伸びながら進む様子が確認された．0.4 s 時点で解析結果，実験結果ともに障害物で跳ね上がった段波が右側の壁に衝突している．0.5 s 時点では解析結果は液体が壁に衝突した後，障害物右側では壁に衝突した液体が右側の壁に沿って進み，気体を囲うような様子がみられる．実験結果からも同様の結果が確認された．

自由水面解析から得られた結果は，実験画像と概ね同じような結果を得られたが，0.3 s では実験と比べ解析結果は波の動きが遅く，0.4 s では壁に向かって伸びた波が低くなった．これは，移流項の離散化に一次精度風上差分を用いたことにより，数値粘性が生じた影響であると考えられ，今後，より高次のスキームの導入を検討する必要がある．

c）浮力の解析

最後に自由表面を含む問題での固体－流体間の相互作用処理の妥当性を確認するため，円柱を水槽に自由落下させる解析を行った．解析モデルを図8に示す．円柱の密度は 0.5 g/cm^3 と 1.2 g/cm^3 の 2 パターンを用意し，1 ステップあたりの時間増分は 0.0005 s とした．

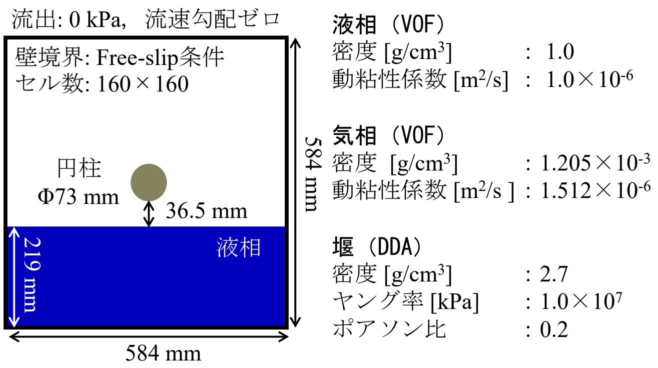

図8 浮力の検証解析モデル

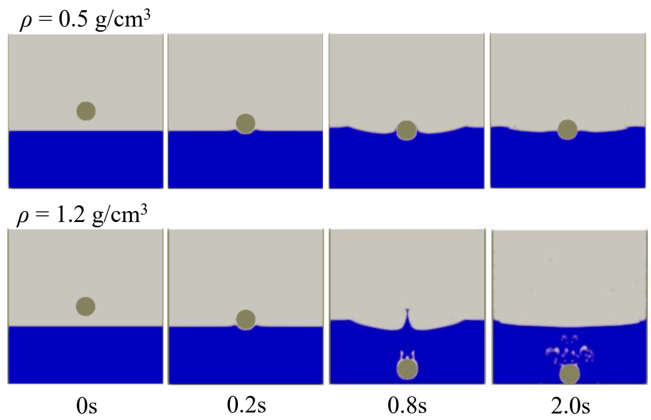

図9 自由落下解析結果

解析結果（図9）をみると自由落下開始後 0.2 s までは，密度 1.2 g/cm^3，0.5 g/cm^3 の場合とも同じように円柱が水面に触れた．その後，水の密度 1.0 g/cm^3 より大きい密度 1.2 g/cm^3 の円柱は時間が経つと水中に沈んだ．対して，密度 0.5 g/cm^3 の円柱は半分ほど沈んだ後，それ以上は沈まず，浮力解析の妥当性を確認した．

6. 結論

本研究では，埋め込み境界法を用いて DDA-VOF 法による固体—液体連成解析手法を開発した．開発手法を用いて，円柱回り流れ，ダムブレイク流れ，浮力の検証解析を実施し，その妥当性を検証した．今後，本手法を用いて土石流中に含まれる巨礫の挙動評価を進める．

参考文献

1) 橋本涼太， 菊本統， 小山倫史：摩擦構成則の陰的積分アルゴリズムを導入した不連続変形法（DDA）の開発，土木学会論文集 C（地圏工学），Vol. 75，No. 3，pp. 336-348，2019.
2) Yokoi, K.: Efficient implementation of THINC scheme: A simple and practical smoothed VOF algorithm, Journal of Computational Physics, Vol. 226, pp. 1985-2002, 2007.
3) 水谷恒一郎，山本悟：簡単な IB 法による三次元任意形状周り流れの数値計算，日本機械学会論文集（B 編），Vol. 74, No. 742, pp. 1347-1353, 2008.
4) Panton, R. L.: Incompressible flow (Second edition), John Wiley & sons Inc.,1995.
5) Koshizuka, S., Tamko, H. and Oka, Y.: A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation, Computational Fluid Dynamics Journal, Vol. 4, No. 1, pp.29-46, 1995.