

スーパーエレメント法を用いたシザーズ要素の固有値解析の縮約法

東日本旅客鉄道株式会社 正会員 ○有賀 生

広島大学大学院 正会員 有尾 一郎

1. はじめに

計算機の性能と数理解析の発達に伴って、有限要素法(FEM, RVE)などによる振動や座屈などの構造特性値は固有値解析によって得ることが一般的である。しかし、この解析は離散化要素の増加に伴って自由度の3乗に比例し、大きな固有値問題は計算精度と計算時間に課題があることが知られている^{1), 2)}。さらに可動なシザーズ構造は多重固有値問題を抱え解析上困難を伴う。本解析研究では、FEMモデルの自由度を外部と内部に分け、部分構造化による行列の縮約が可能となるスーパーエレメント法(SE法)の計算概念を新たに開発し、その数値解の不変性と計算時間や容量を縮約し、解析の優位性が得られた。

2. 本解析手法の計算原理

本提案するスーパーエレメント(SE法)の自由度は内部とSEに接続される外部に分類される。剛性方程式において、剛性行列を K 、変位ベクトルを $\mathbf{u}$ 、外力ベクトルを $\mathbf{f}$ とする。添字は外部を e 、内部を i とそれぞれ表し、その自由度を収集する。 K と $\mathbf{f}$ は与値とし、 $\mathbf{u}$ を求める変位解析を行う。この解析では、内部変位ベクトル $\mathbf{u}_i$ を消去して未知数を外部変位ベクトル $\mathbf{u}_e$ のみとする過程の縮約表現を用いた。

外部 e と内部 i に部分構造化に区分した剛性支配方程式の縮約表現を次式にて考える。

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei} \\ K_{ie} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

式(1)の2段目の方程式

$$K_{ie}\mathbf{u}_e + K_{ii}\mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i \quad (2)$$

から、 K_{ii} が非特異の場合、 $\mathbf{u}_i$ を次式で表現できる。

ここに、 $\Gamma = K_{ii}^{-1}K_{ie}$ とおくと

$$\mathbf{u}_i = K_{ii}^{-1}\mathbf{f}_i - \Gamma\mathbf{u}_e \quad (3)$$

と表され、式(1)に置き換えると、縮約表現された剛性方程式が得られる。

キーワード SE法, シザーズ, 縮約固有値, 固有振動
連絡先 〒739-8543 東広島市鏡山 1-4-1

Table. 2 Comparison of displacement results

Table. 1 Analysis condition

Length of the scissor member L (mm)	1000
Cross-sectional area of the scissor member A (mm ²)	384
Deployment angle θ (°)	45
Elastic modulus of the scissor units E_{al} (GPa)	70
Sectional moment of inertia I (mm ⁴)	234592
Load P (N)	1000
Weight of the scissors unit Q (N)	1000
Stiffness ratio between the scissor units and their reinforcement α	0.1

Node number	$\mathbf{u}$ (×m) (FEM)	$\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i$ (×m) (SE method)
1 (e=1)	0	0
	0	0
	0	0
	-0.0180	-0.0180
2 (e=2)	0.0102	0.0102
	-0.0051	-0.0051
	0	0
	-0.0145	-0.0145
3 (i=1)	0.0051	0.0051
	-0.0051	-0.0051
	-0.0073	-0.0073
	-0.0145	-0.0145

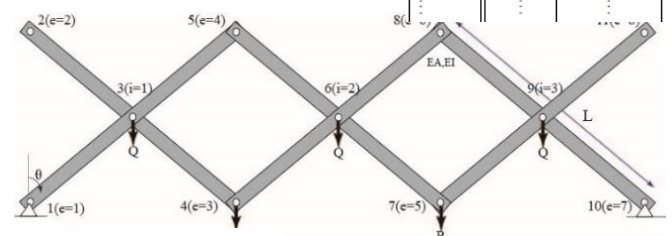


Fig. 1 Analysis model

$$\widetilde{K}_{ee}\mathbf{u}_e = \widetilde{\mathbf{f}}_e \quad (4)$$

ここに、 $\widetilde{K}_{ee} = K_{ee} - K_{ei}\Gamma$, $\widetilde{\mathbf{f}}_e = \mathbf{f}_e - \Gamma\mathbf{f}_i$ とし、これは部分構造化に圧縮された剛性行列と外力ベクトルである。 $\mathbf{u}_e = \widetilde{K}_{ee}^{-1}\widetilde{\mathbf{f}}_e$ と求まり、この解を式(3)に代入すると、最終的に全ての内部変位ベクトル $\mathbf{u}_i$ が算出される。

3. 平面シザーズにおける解析比較

モデルの解析条件をそれぞれ Table.1 と Fig.1 に示す。この場合は無補強とする。従来の FEM ではモデルの節点番号を順に振って一律に変位を求めるのに対し、SE法では節点番号を境界部と内部に分け、求める境界部と内部の変位は式(3), (4)でそれぞれ $\mathbf{u}_e$ と $\mathbf{u}_i$ を導出する。Table.2 に FEM と SE 法で導出した変位結果を示す。その結果から両者による数値解が一致し、整合した。

4. 本解析による固有値解析の縮約

SE法によるシザーズ構造の振動問題における一般化固有値問題を行った。剛性行列を K 、質量行列を m 、固有値を λ 、変位ベクトルを $\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i$ とすると SE法における自由振動方程式は、

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei} \\ K_{ie} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_{ee} & m_{ei} \\ m_{ie} & m_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

となり、次式のように縮約表現される。

$$\widetilde{K}_{ee} \mathbf{u}_e = \lambda \widetilde{m}_{ee} \mathbf{u}_e \quad (6)$$

$$\widetilde{m}_{ee} = m_{ee} - m_{ei} \Gamma - \Gamma^T (m_{ie} - m_{ii} \Gamma) \quad (7)$$

これにより Table.1 と Fig.1 に示す解析条件からシザーズの鉛直方向変位に対する一般化固有値解析を行った。FEM の K と m による固有値は、

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0000, \lambda_2 = 0.1445, \lambda_3 = 0.6075, \lambda_4 = 1.4695, \\ \lambda_5 &= 1.4695, \lambda_6 = 1.4695, \lambda_7 = 1.4695, \lambda_8 = 1.4695, \\ \lambda_9 &= 2.7883, \lambda_{10} = 4.3034, \lambda_{11} = 5.0579 \end{aligned}$$

SE 法の $\widetilde{K}_{ee}$ と $\widetilde{m}_{ee}$ による固有値は、

$$\begin{aligned} \lambda_{e1} &= 0.0000, \lambda_{e2} = 0.1545, \lambda_{e3} = 0.7552, \lambda_{e4} = 1.4695 \\ \lambda_{e5} &= 1.4695, \lambda_{e6} = 1.4695, \lambda_{e7} = 1.4695, \lambda_{e8} = 1.4695 \end{aligned}$$

K_{ii} と m_{ii} による固有値 $\lambda_i = 1.4695$ が求められ FEM と SE 法の固有モードの一例を Fig.2 と Fig.3 に示す。固有値で 1.4695 が両者に $n+2$ 個あった。この数値は SE 法の K_{ii} と m_{ii} から求めた固有値と一致した。

5. 格間数 n に対する計算量の検証

格間数 n に対応する計算容量と計算時間は Table.3 に示す。FEM に比べ SE 法は計算時間の大幅な短縮が可能となり、FEM の計算容量の限界以上の解析を行うことが可能となった。

6. 格間数 n に対する固有振動数の変化

格間数 n に対する最小固有値の平方根である 1 次固有振動数 ω_{1n} の変化を参照し、解析結果を検証する。1 格間から 10 格間の固有振動数と先行研究で用いた予測式 $\omega_{1n}/\omega_{11} = 1/n$ (1 格間の 1 次固有振動数 $\omega_{11} = 1.2122$) を Fig.4 に示す。FEM と SE 法により得られたそれぞれの ω_{1n} は予測式とほぼ一致した。

7. 結語

本卒業研究は、シザーズ構造系の階層的な部分構造から構成される構造解析上の固有値解析に適用するために、スーパーエレメント法の解析プログラムを開発し、支配方程式の行列演算の縮約化、その数値解と計算速度の検証を行った。

その他明らかになったことを以下に示す。

1. 固有値解析では、FEM の K と m による固有値 λ 、SE 法の $\widetilde{K}_{ee}$ と $\widetilde{m}_{ee}$ による固有値 λ_e 、 K_{ii} と m_{ii} による固有値 λ_i が一致した。

2. 格間数 n による 1 次固有振動数 ω_{1n} の変化の検証を行った結果、実際に得られた固有値は予測式 $\omega_{1n}/\omega_{11} = 1/n$ とほぼ一致し、検証の妥当性と FEM と SE 法の整合性を確認した。

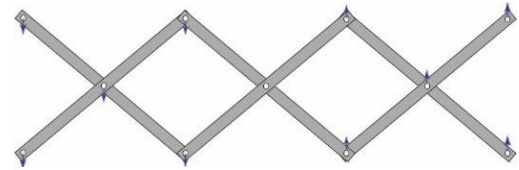


Fig. 2 Primary vibration mode (FEM)



Fig. 3 Primary vibration mode (SE)

Table. 3 Comparison of measurement time

Number of coffer n		1	2	3	5	10	20
Array capacity $cs(n)$	FEM	400	1024	1936	4624	16384	61504
	SE method	256	576	1024	2304	7744	28224
Time to calculate $ct(sec)$	FEM	0.1992	0.2004	0.2048	0.2244	0.2902	0.5206
	SE method	0.2416	0.2144	0.2188	0.2344	0.2720	0.3970
Number of coffer n		50	100	150	190	200	250
Array capacity $cs(n)$	FEM	369664	1459264	3268864	5234944	5798464	9048064
	SE method	166464	652864	1459264	2334784	2585664	4032064
Time to calculate $ct(sec)$	FEM	2.3168	12.8966	58.2472	605.9746	-	-
	SE method	1.2382	5.1060	15.4596	49.4028	66.2156	381.4076

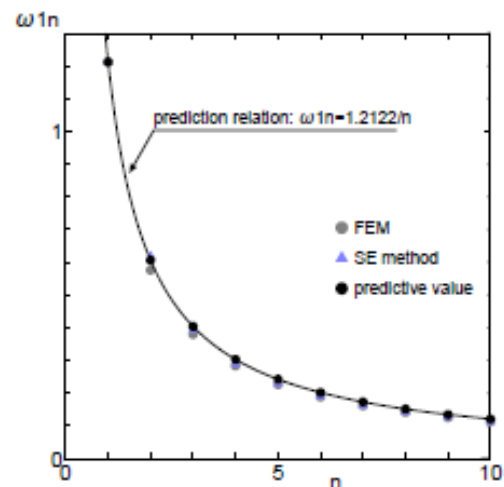


Fig. 4 Change in primary natural frequency for n

参考文献

- 1) 理化学研究所計算科学研究センター, 大規模並列数値計算技術研究チーム, <https://www.rccs.riken.jp/jp/overview/lab/lpnctr.html> (2021).
- 2) 林正,(2006), ハイラーキ有限要素法-大型要素による高精度解析法-, 技報堂出版