

地震時における全層の応答変位を低減するための二自由度系構造物の条件の模索

鳥取大学 学生会員 ○花田 貴也
鳥取大学 正会員 谷口 朋代
鳥取大学 正会員 向坊 恭介

1. 背景と目的

現在、構造物に耐震壁や筋かいを入れるなどして構造物の耐力を高めたり、地面と構造物との間に免震装置を導入することで構造物に作用する地震力を低減するなどの工夫がなされている。本研究では、二自由度系で表される構造物を対象に、一般の RC 造、木造の組み合わせの範囲で 1, 2 層の剛性や質量を変化させることで 1, 2 層ともに地震による応答変位を低減させる可能性についての数値解析による検討を行った。

2. 対象構造物のモデルの概要と運動方程式

図 1 は、本研究が対象とする二自由度系構造物のモデルを示し、その運動方程式は次式をとる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{x}_g \quad \dots (1)$$

ただし、

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1m_1 + 2\zeta_2\omega_2m_2 & -2\zeta_2\omega_2m_2 \\ -2\zeta_2\omega_2m_2 & 2\zeta_2\omega_2m_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2m_1 + \omega_2^2m_2 & -\omega_2^2m_2 \\ -\omega_2^2m_2 & \omega_2^2m_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

各変数を以下のように定義し、添え字 i は各層数を示す。

m_i : 質点の質量(kg)
 c_i : 粘性減衰係数(N・s/m)
 k_i : バネ定数(N/m)
 u_i : 質点の応答変位(m)
 $\ddot{x}_g$: 地動加速度(m/s²)

$$\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}, \quad \zeta_i = \frac{c_i}{2\sqrt{m_i k_i}}$$

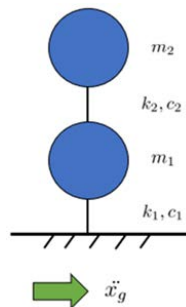


図 1

ω_i : 質点の固有円振動数(1/s)

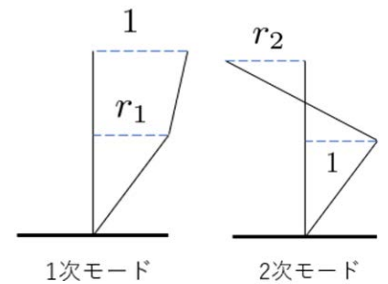
ζ_i : 質点の減衰比

ここで、第一層と第二層の質量の比である質量比を $\varepsilon = m_1/m_2$ とすると、各モードの固有円振動数 Ω_1, Ω_2 は以下ようになる。

$$\Omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\omega_1^2 + (1 + \varepsilon)\omega_2^2 \pm \sqrt{\{\omega_1^2 + (1 + \varepsilon)\omega_2^2\}^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots (2)$$

図 2 は、モード形状を示し、モード行列は次式となる。

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} r_1 & 1 \\ 1 & r_2 \end{bmatrix}$$



ただし、

図 2

$$r_1 = \frac{2\varepsilon\omega_2^2}{\omega_1^2 + (\varepsilon - 1)\omega_2^2 + \sqrt{\{\omega_1^2 + (1 + \varepsilon)\omega_2^2\}^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2}}$$

$$r_2 = \frac{\omega_1^2 + (\varepsilon - 1)\omega_2^2 - \sqrt{\{\omega_1^2 + (1 + \varepsilon)\omega_2^2\}^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2}}{2\varepsilon\omega_2^2}$$

よって変位はモード行列を用いて $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{q}(t)$ となり、(1)式に代入し、各項の前方からモードの行列の転置したものを選び、減衰マトリックスの非対角項を無視することにより運動方程式の非連成化を行う。

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi} \dot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{q}(t) = -\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \mathbf{1} \ddot{x}_g = -\mathbf{Q} \ddot{x}_g \quad \dots (3)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \begin{bmatrix} 2Z_1\Omega_1N_1 & 0 \\ 0 & 2Z_2\Omega_2N_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) + \begin{bmatrix} \Omega_1^2N_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2N_2 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) = -\begin{bmatrix} m_1r_1 + m_2 \\ m_1 + m_2r_2 \end{bmatrix} \ddot{x}_g$$

キーワード 固有円振動数, モードの重ね合わせ, モード特性値

連絡先 〒680-8552 鳥取県鳥取市湖山町南 4 丁目 101 鳥取大学大学院持続性社会創生科学研究科

TEL 0857-31-5281

ただし、 N_j, Z_j, β_j はそれぞれ j 次のモード質量、モード減衰定数、モード刺激係数であり、次式で与えられる。

$$N_1 = m_2 \left(\frac{r_1^2}{\varepsilon} + 1 \right), N_2 = m_1 (1 + r_2^2 \varepsilon),$$

$$Z_1 = \frac{r_1^2 \zeta_1 \omega_1 / \varepsilon + \zeta_2 (r_1 - 1)^2 \omega_2}{\Omega_1 (r_1^2 / \varepsilon + 1)}, Z_2 = \frac{\zeta_1 \omega_1 + (r_2 - 1)^2 \zeta_2 \omega_2 \varepsilon}{\Omega_2 (1 + r_2^2 \varepsilon)},$$

$$\beta_1 = \frac{m_1 r_1 + m_2}{m_2 \left(\frac{r_1^2}{\varepsilon} + 1 \right)}, \beta_2 = \frac{m_1 + m_2 r_2}{m_1 (1 + r_2^2 \varepsilon)}$$

3. 構造物の振動数範囲

本論文では以下に示す第一層と第二層の振動数比 θ を用いてモード諸量や構造物の応答変位の特徴を整理する。

$$\theta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_{ave}} \quad \text{ただし} \quad \omega_{ave} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

振動数比 θ を用いた理由は各層の振動数(ω_1 及び ω_2)がどのような極値をとっても、 θ は発散せずに $|\theta| \leq 2$ となり、定量的な取り扱いが可能なためである。

定義した θ を用いて、各層の振動数の変化に伴うモード特性値の変化を図3に示す。

ただし、各モードの固有円振動数 Ω 、モード形状 r 、刺激係数 β は質量比 ε の関数であり、各モードの減衰比 Z は質量比 ε と各層の減衰比 ζ の関数であるため、 ε, ζ を $0.01 < \varepsilon < 1.00$, $0.05 < \zeta < 0.15$ の範囲内とした。

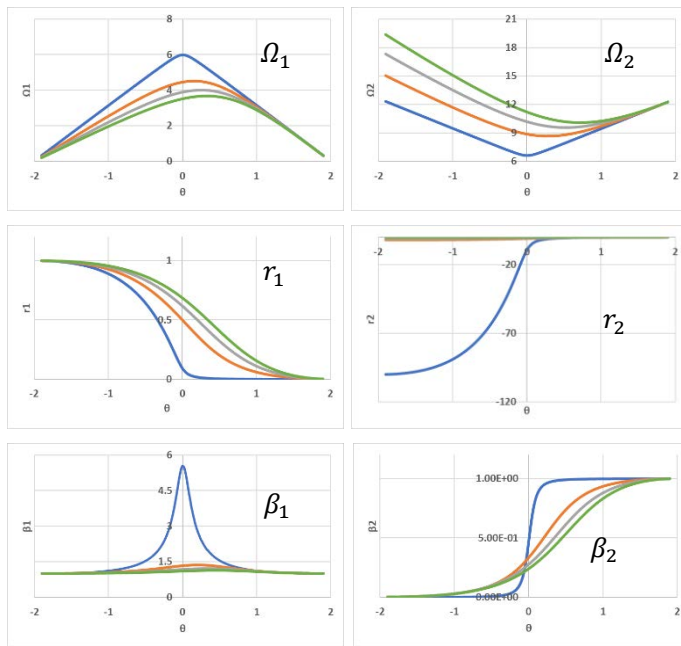
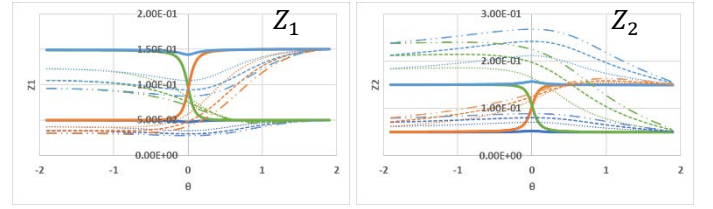


図3 θ と各モード特性値



ここで、 Ω, r, β 図は青線、橙線、灰色線、緑線は、それぞれ質量比 ε が0.01, 0.50, 1.00, 1.50の場合を示す。一方、 Z を示す図の青線、橙線、緑線、水色線は第一層と第二層の減衰定数 ζ_1, ζ_2 の組み合わせがそれぞれ(0.05, 0.05), (0.15, 0.05), (0.05, 0.15), (0.15, 0.15)の場合を示し、かつ実線、点線、破線、鎖線はそれぞれ質量比が0.01, 0.50, 1.00, 1.50の場合を示している。

以降に図3を用いて各層の応答変位を各層のモード特性値ごとに考察していく。

4. FRMの導入

本研究では白色雑音状の地動加速度を受ける二自由度系構造物の応答変位をFRM法¹⁾で求めた。

周波数特性応答マトリックスを以下に示す。

$$H(\omega) = [-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}]^{-1} \cdots (4)$$

応答変位のパワースペクトル密度関数が次式で求められる。

$$\Phi_{uu}(\omega) = H(\omega) \mathbf{M} \mathbf{1} \Phi_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}(\omega) \mathbf{1}^T \mathbf{M}^T H(\omega)^* \cdots (5)$$

ただし、 $\Phi_{\ddot{x}_g \ddot{x}_g}$:地動加速度のパワースペクトル密度関数(PSD), *:共役複素数を表す。

$$\sigma_p^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{u_p u_p}(\omega) d\omega, \quad \sigma_s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{u_s u_s}(\omega) d\omega \cdots (6)$$

ただし $\Phi_{u_p u_p}$, $\Phi_{u_s u_s}$ は $\Phi_{uu}(\omega)$ の対角要素である。

た(6)式のパワースペクトル密度関数の対角要素を数値積分で求めた。

図4はFRM法で求めた振動数比 θ 毎の各層の応答変位図である。

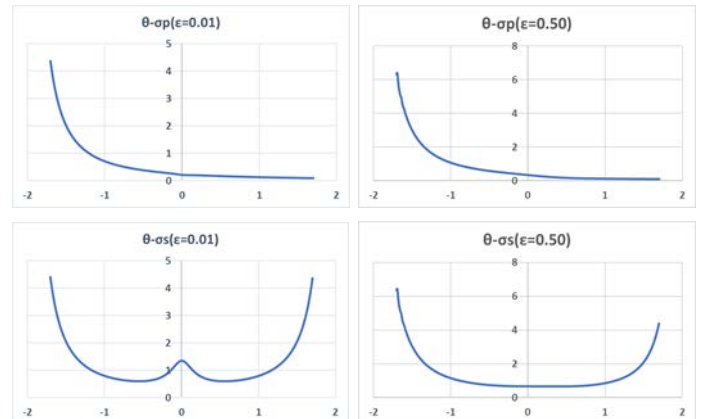


図4 1層目の応答変位(上段), 2層目の応答変位(下段)

ただし、左側が $\varepsilon = 0.01$ 、右側が $\varepsilon = 0.50$ 、また各層の減衰比は $\zeta_{1,2} = 0.05$ である。

図 4 より、 $\varepsilon = 0.01$ の場合、 $\theta \cong 0$ 付近では 1 層目の応答変位が低下して 2 層目の応答変位が増加していることが分かる。これは FRM 法では減衰マトリックスの非対角要素も考慮して計算しているため、それを介したモード間の連成の効果を正しく表現している。

5. 各層の応答変位と振動数の関係

図 4 より、1 層目の応答変位と 2 層目の応答変位は θ の正、負側で応答の様子が異なることが分かる。各層のモード特性値に注目しモードの重ね合わせを用いて、この応答の差異を説明する。

非連成化された運動方程式に基づき各層の応答変位をモードの重ね合わせを用いて算出したものを以下に示す。

1 層目の応答変位 $u_1 : q_1 \times r_1 \times \beta_1 + q_2 \times 1.0 \times \beta_2$

$$= \sqrt{\frac{\pi\Phi_0}{2Z_1\Omega_1^3}} \times r_1 \times \beta_1 + \sqrt{\frac{\pi\Phi_0}{2Z_2\Omega_2^3}} \times 1.0 \times \beta_2 \quad \dots (7)$$

2 層目の応答変位 $u_2 : q_1 \times 1.0 \times \beta_1 + q_2 \times r_2 \times \beta_2$

$$= \sqrt{\frac{\pi\Phi_0}{2Z_1\Omega_1^3}} \times 1.0 \times \beta_1 + \sqrt{\frac{\pi\Phi_0}{2Z_2\Omega_2^3}} \times r_2 \beta_2 \quad \dots (8)$$

図 4 に示した振動数比 θ 毎の各層の応答変位の図 3 に示した各モード特性値の特徴に基づいて考察する。

1 層目の応答変位について：

θ が負側では、 Ω_1 が小さい値をとるため、(7)、(8)式の第一項は大きい値をとる一方、 β_2 が 0 に収束するため、同第二項は 0 に収束する。また、 θ が正側では、 r_1 が 0 に収束するため同第一項は 0 に収束する一方、 Ω_2 が大きな値をとるため、同第二項は小さな値をとる。

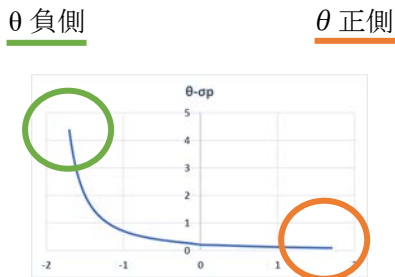


図 5 1 層目の応答変位

$$\begin{aligned} \bullet u_1 &= \underbrace{q_1 r_1 \beta_1}_{\text{大きい値}} + \underbrace{q_2 \beta_2}_{0 \text{ に収束}} \\ \bullet u_1 &= \underbrace{q_1 r_1 \beta_1}_{0 \text{ に収束}} + \underbrace{q_2 \beta_2}_{\text{小さい値}} \end{aligned}$$

2 層目の応答変位について：

θ が負側では、 Ω_1 が小さい値をとるため、(7)、(8)式の第一項は大きい値となる一方、 β_2 が 0 に収束するため、同第二項は 0 に収束する。また、 θ が正側では、 Ω_1 が大きな値をとるため、同第一項は大きな値となる一方、 r_2 が 0 に収束するため、同第二項は 0 に収束する。

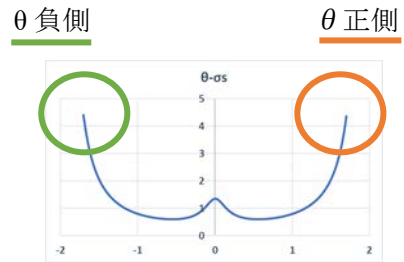


図 6 2 層目の応答変位

$$\begin{aligned} \bullet u_2 &= \underbrace{q_1 \beta_1}_{\text{大きい値}} + \underbrace{q_2 r_2 \beta_2}_{0 \text{ に収束}} \\ \bullet u_2 &= \underbrace{q_1 \beta_1}_{0 \text{ に収束}} + \underbrace{q_2 r_2 \beta_2}_{\text{大きい値}} \end{aligned}$$

6. 構造物全体の応答の最適化

各層の剛性や質量を変化させて構造物の全層の応答変位を低減させる可能性を検討するため、本論文では各層の応答変位の二乗和平方根($\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$)を用いて検討することを提案する。二乗和平方根を用いた理由として、1, 2 層両層の応答を考慮し、応答の大小が区物できるためである。また本論文では二自由度系構造物として、柔・剛混合構造物を想定することで、振動数関数 θ を実構造物に落とし込むことを考える。

ここで、一般的な RC 造の固有周期を T_1 、木造の固有周期を T_2 として以下に示す。

$$0.05 < T_1 < 0.15, \quad 0.25 < T_2 < 0.5$$

上記で仮定した固有周期の範囲内となる二自由度系構造物を想定し、それぞれの組み合わせと振動関数 θ の範囲を以下に示す。

1 層目：RC 造、2 層目：木造の場合

$$\rightarrow 0.5 < \theta < 1.6363 \quad \dots A$$

1 層目：木造, 2 層目：RC 造の場合

→ $-0.5 < \theta < -1.6363$. . . B

1,2 層目ともに RC 造または 1,2 層目ともに木造
の場合 → $-0.5 < \theta < 0.5$. . . C

縦軸に 1 層目と 2 層目の二乗和平方根 $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, 横軸に振動数比 θ 用いる. また本論文では一般的な二自由度系構造物を対象としているため質量比 ε を $0.50 \sim 2.00$ の範囲内とし, 減衰比 ζ は 3%, 5% の組み合わせとする.

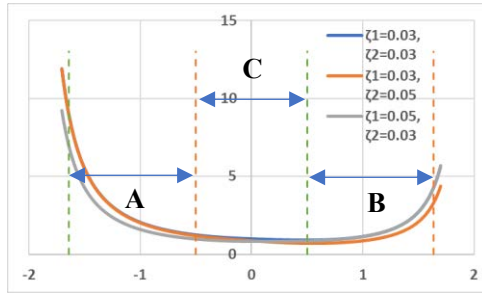


図 7 二乗和平方根図(パラメータ:各層の減衰比 $\zeta_{1,2}$)
ただし $\varepsilon = 0.50$ である.

図 7 と同様に $\varepsilon = 1.00, \varepsilon = 2.00$ も同様に解析を行い, 二乗和平方根の最小値の値と対応する θ の値を以下の表に示す.

ε	0.50			1.00		
ζ_1	0.03	0.03	0.05	0.03	0.03	0.05
ζ_2	0.03	0.05	0.03	0.03	0.05	0.03
σ_{min}	0.887	0.712	0.807	1.011	0.815	0.923
θ	0.48	0.56	0.07	0.58	0.65	0.33
θ 許容範囲	0.26	0.39	-0.18	0.35	0.48	0.06
	0.68	0.73	0.45	0.76	0.81	0.6
	2.00					
	0.03	0.03	0.05			
	0.03	0.05	0.03			
	1.261	1.017	1.161			
	0.73	0.8	0.56			
	0.53	0.63	0.29			
	0.9	0.95	0.78			

表 1 各質量比, 減衰比の組み合わせにおける二乗和平方根の最小値と振動数比

ただし σ_{min} は二乗和平方根の最小値を示し, θ 許容範囲は二乗和平方根の最小値から 3% 許容した場合の θ の取りうる範囲を示す.

表 1 より二乗和平方根の最小値に注目すると, 1 層目の減衰比が 2 層目の減衰比より大きい又は同値の場合 ($\zeta_1 \leq \zeta_2$), $\theta = 0.5 \sim 0.8$ 付近で二乗和平方根が最小値となる. つまり図の範囲 B にあたる 1 階が RC 造, 2 階が木造である組み合わせが全層の応答変位を低減する.

また 1 層目の減衰比が 2 層目の減衰比より小さい場合 ($\zeta_1 > \zeta_2$), $\theta = 0.0 \sim 0.5$ 付近で二乗和平方根が最小値となる. つまり図の範囲 C にあたる 1,2 層目ともに RC 造または 1,2 層目ともに木造である組み合わせが全層の応答変位を低減する.

また二乗和平方根の最小値から 3% までを許容するとすれば, θ の範囲はある程度広く設けることができる.

7. まとめ

本研究では, 主として構造物の固有円振動数に着目し, 二層構造物の全層の応答変位を低減する条件について検討を行った. 一層と二層の振動数に基づいて θ を定義し, 振動数比 θ 毎の各層の応答変位の特徴についてモードの重ね合わせと各モード特性値を用いて考察した. また全層の応答変位を比較する指標として二乗和平方根を提案した. 設計において対象となる構造物の各層の減衰比や質量比の組み合わせに伴う二乗和平方根の最小値に対応する θ を満たすような振動数の組み合わせとなるように設計することで全層の応答変位が低減できると考える.

尚, 本研究では, 二乗和平方根を提案したが, 各次モードの白色雑音に対する応答変位の影響が含まれており, 純粋な応答変位によるものなのか固有円振動数に伴う変化によるものなのか判断できないため, 新たな指標の提案が必要であると考え.

参考文献

- 1) Tomoyo Taniguchi, Armen Der Kiureghian, Mikayel Melkumyan : Effect of turned mass damper on displacement demand of base-isolated structure, Engineering Structures 2008, p3478-3488