スマート構造のためのマルチスケール指標を導入した構造最適化解析

大日本コンサルタント　正会員　○ 横谷 祐樹
広島大学大学院　正会員　有尾 一郎

1.　はじめに

構造物の形態は，その構造物の目的や用途などに応じて既設の標準的な構造物の形状をもとに，その設計条件を満足するように材料や寸法などが人為的に修正され，最終的な形状・断面等の構造形態が決められる．しかしながら，構造物が大型化すると,「無駄な贅肉 (材料) を切り落とし，必要な筋肉を必要な部分に配置する」といった軽量かつ丈夫な構造形態そのものを設計する必要性に迫られる．このような構造最適化問題のベンチモデルとして「コート掛け問題」が知られている．この問題の解として，Michell による理想形態 (1904 年)[1)]がある．しかし，この解では各部材の必要な要素剛性割合や応力状態が明らかになっていない．また，数値計算時には解のメッシュ依存性やチェッカーボード現象の課題も存在する．

2.　Michell の構造最適化

1904 年に A. G. M. Michell は，構造形態に対しひずみ場の特徴をもとに，最適形態 (最小重量構造) が直交曲線網 (Hencky 網) で与えられることを導き出した [1)∼4)]．この直交曲線網は完全塑性体のすべり線場に一致している．この最適形態構造は，Michell Truss として知られており，現在でも骨組構造の最適形態のベンチマークモデルとして照合される重要な形態となっている．また，1990 年代初頭には進化的構造最適化法 (ESO) や双方向進化的構造最適化法 (BESO) が提案され [5),6)]，様々な寸法，位相，形状最適化問題を解決できるようになった．これらの手法は構造体から不要部材が取り除かれると同時に，必要部材が徐々に追加されることによって，最適な設計を実現している．近年では，T. H. Kwok ら [7)]が，主応力線に基づく位相最適化法 (PSLs: Principal Stress Lines) を提案し，Michell Truss に近い形態を得ている．これらの構造最適化では，より高精度な形態を得るために，メッシュ分割数を増やして高解像度の軽量な最適化構造を得ることが一般的である．しかしながら，計算機の使用に当たってはメモリーや容量が無限ではなく，制約上有限であってもどの程度まで要素数が必要かは計算機環境や計算精度，対象とする個々のモデルによって異なるというのが問題となっている．本研究はマイクロ骨組要素の配置によって，**Fig.1** に示すような Michell[1)] の概念による最適構造形態を反復法によって再現を試みる．ただし，この構造系は最適であるが骨組要素としては不安定構造としてよく知られている．しかし，基本的骨組み構造と考えれば圧縮部材と引張部材だけから成り立ち，荷重とつりあう構造系となる．

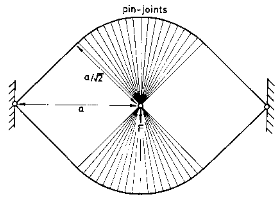


Fig. 1　Michell の最適構造概念 (1904)

(1)　マイクロ骨組要素による最適構造形態

Fig.2(a) に示すような連続体の設計領域 Ω を，M 個の骨組要素からなる有限の設計変数

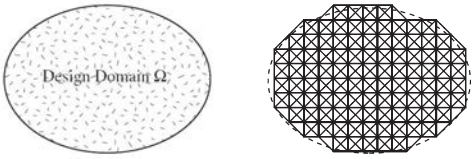
$$\boldsymbol{x}=\left(\cdots,x^{(m)},\cdots\right)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{M}\quad\text{in}\quad\Omega \tag{1}$$

で満たされるものと近似する．すなわち，設計領域は

$$\Omega=\int \mathrm{d}\Omega \approx \lim_{\mathrm{d}\Omega\to0}\sum_{m}^{(1/\mathrm{d}\Omega)\in\mathbf{Z}}\mathrm{d}\Omega^{(m)}=\sum_{m\gg1}^{M}\mathrm{d}\Omega^{(m)}\propto\sum_{m\gg1}^{M}x^{(m)} \tag{2}$$

と **Fig.2**(b) のように有限のマイクロ骨組要素 $\mathrm{d}\Omega$ で敷き詰められるものとする．離散数 M が大きくなれば，この均質な設計領域 Ω は無数の周期骨組要素で敷き詰められることとなる．均等な周期要素を用いることで離散化によるモデルの生成および形態創生が容易であり，複雑な設計領域や設計条件にも柔軟に対応できるといった利点がある[2)]．

キーワード　topology optimization, smart structure, periodic frame elements, multi-scale
連絡先　〒 739-8527 東広島市鏡山 1-4-1 広島大学大学院工学研究科社会基盤環境工学専攻 TEL082-424-7792



(a) 連続体　　　(b) マイクロ骨組要素

Fig. 2 連続体の離散化

3.　形態形成の理論

まず初期条件として設計領域と初期剛性 $\boldsymbol{x}_{(0)}$ を設定し，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, f, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = K(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} - f\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

と線形釣合方程式を定める．ここに $\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル，f は荷重パラメータ，$\boldsymbol{p}$ は荷重ベクトルである．一般に線形有限要素法では部材剛性 $\boldsymbol{x}$ と荷重 $f\boldsymbol{p}$ が与えられ，そのときの変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を求めることになる．

本研究では，剛性行列の修正は各部材の応力と平均の応力の比によって行い，釣合式の条件を満たすように剛性を変化させる．荷重制御や変位制御によって釣合点 $(\boldsymbol{u}_{(\nu)}, p, \boldsymbol{x}_{(\nu)})$ が得られたとしたら，このときの部材応力は，

$$\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)} = \mathcal{W}\left(\boldsymbol{u}_{(\nu)}\right) \tag{4}$$

と，各部材の変位の関数とする．ここに，ν はフィードバック回数，$\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)} = (\cdots, \sigma^{(m)}_{(\nu)}, \cdots)^{\mathrm{T}}$ を表すこととする．さらに，部材応力と平均応力 $\overline{\sigma}_{(\nu)}$ の比によって，

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_{(\nu)}) = \gamma \frac{|\sigma^{(m)}_{(\nu)}|^2}{\overline{\sigma}^2_{(\nu)}} \boldsymbol{x}_{(\nu)} = \boldsymbol{x}_{(\nu+1)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{5}$$

$$\overline{\sigma}_{(\nu)} = \frac{1}{M}\sqrt{\sum_{m=1}^{M} \sigma^{(m)}_{(\nu)}}, \quad m = 1, 2, \cdots, M \quad \cdot \tag{6}$$

と修正剛性行列も更新される．ここで，γ はどれだけ次の剛性へと反映させるかを示す還元率を表し，解の収束率を調整する．したがって，部材剛性は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{(\nu+1)} &= \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)}, \boldsymbol{x}_{(\nu)}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\cdots\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_{(0)}))) \\ &= \mathcal{F}^{(\nu)}(\boldsymbol{x}_{(0)}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{7}$$

のように反復される．

本研究における最適化問題は，最小重量設計を目的にしており，以下のように条件を設定した．

$$\begin{aligned}&\text{Minimize} : \sum_{m=1}^{M} \boldsymbol{W}^{(m)} = \sum_{m=1}^{M} \rho \boldsymbol{A}^{(m)}_{(\nu)} \ell^{(m)} \\ &\text{subject to} : \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, f, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \\ &\boldsymbol{A}^{(m)}_{(\nu)} \leq A_{max}, \quad \sigma^{(m)}_{(\nu)} \leq \sigma_a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{8}$$

ここに，$\boldsymbol{W}^{(m)}$ は各部材の重量，ρ は密度，$\ell^{(m)}$ は部材長，A_{max} は最大断面積，σ_a は許容応力をそれぞれ表す．密度と部材長は一定であるため，各部材の断面積 $\boldsymbol{A}^{(m)}_{(\nu)}$ を変化させることによって，より最適な形態を形成できる．

4.　解析例

発表当日に，数値解析事例を提示する．

5.　結　語

本研究では，マイクロ有限骨組要素の断面力計算を可能にする新たな周期骨組要素の構築，構築した周期骨組FEM要素を用いた位相最適化による構造のスマート化，位相最適化で得られたミクロな形態を大局的に評価できる，マイクロ–マクロのマルチスケール視点で必要な最適化モデル精度の指標を新たに導入し，スマート構造設計のための最適化ベンチマークモデルとしての構造最適化解析を行った．

参考文献

1) A. G. M. Michell : The limits of economy of material in framed structures, Phil. Mag. (Series 6), 8, 589-597, 1904.
2) I. Ario, M. Nakazawa, Y. Tanaka, I. Tanikura, S. Ono : Development of a prototype deployable bridge based on origami skill, Automation in Construction, Vol.32, 104-111, 2013.
3) T. Lewinski, T. Sokol, C. Graczykowski : Michell Structures, Springer (2019)
4) 尾田十八ら: 構造・材料の最適設計, 日本機械学会編, 技報堂出版 (1989)
5) Y. M. Xie, G. P. Steven : A simple evolutionary procedure for structural optimization, Comput. Struct. 49 885-886 (1993)
6) X. Y. Yang, Y. M. Xie, G. P. Steven, O. M. Querin : Bi-directional evolutionary method for stiff-ness optimization, AIAA J. 37 (11), 1483-1488 (1999)
7) T. H. Kwok, Y. Li, Y. Chen : A Structural Topology Design Method Based on Principal Stress Line, Computer-Aided Design, Volume 80, pp. 19-31 (2016)