

減衰 1 自由度弾塑性系の等価線形系の提案

鳥取大学 学生会員 ○太田原 基

鳥取大学 正会員 谷口 朋代

鳥取大学 正会員 小野 祐輔

1. 目的

構造物に地震外力が作用すると、応答変位が降伏変位を越えて、塑性変形に至る場合がある。そのため、構造物を設計する際には、塑性変形による最大応答値を把握し、設計に反映させることが重要となる。簡便に構造物に生じる非線形最大応答値を推定する方法として、等価線形化法、変位一定則とエネルギー一定則が挙げられる。本研究では、既往の等価線形化法¹⁾では考慮されていなかった粘性減衰の効果を考慮できる等価線形系の提案を試みる。初めに粘性減衰エネルギーがどのように推移しているかを知るため、減衰 1 自由度弾塑性系における弾性、運動、減衰の各エネルギーの推移の把握を行う。そして、粘性減衰を考慮した

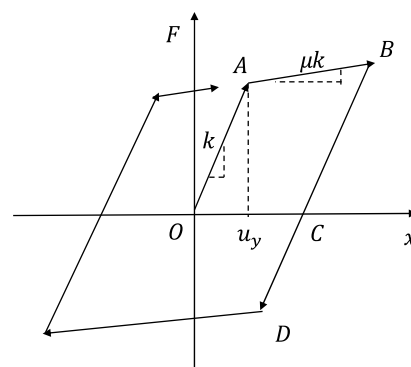


図 1: バイリニア型復元力特性

場合の等価線形系の提案を行い、提案法による弾塑性地震応答変位の最大値の解析精度の検証を行う。

2. 1 自由度弾塑性系のエネルギーの推移

本研究では、図 1 のようなバイリニア型復元力特性を有し、かつ応答速度に依存する減衰機構（以下、粘性減衰）が有る場合と無い場合の 1 自由度弾塑性系に、大きさが -0.03m/s^2 、継続時間が 0.001s のインパルス状の地動加速度を作用させたときに、系内に保存されるエネルギーと消費されるエネルギーがどのように推移しているかを検討した。

図 1 において、点 A は降伏点、点 B は最大変位、点 C は復元力がゼロとなる点、点 D は再び塑性化する点とする。また、 k は初期剛性、 u_y は降伏変位、 μ は剛性低下率を表す。表 1.1 は粘性減衰が無い場合のエネルギーの推移を、表 1.2 は 5% ($h = 0.05$) の粘性減衰が有る場合のそれらを示す。一方、図 2 は本研究で用いる各種力学エネルギーの呼称と力-変位関係図の中で対応する部分を示しており、 W_{e0} は初期剛性 k を持つ弾性歪エネルギー、 W_{e1} は 2 次剛性 μk を持つ弾性歪エネルギー、そして W_p は系内で消費されるエネルギーを表す。

表 1.1 より、点 A では、地動加速度が作用し終わった瞬間に蓄えられた運動エネルギー $W_t = 4.50\text{N}\cdot\text{m}$ から弾性歪エネルギー $W_{e0} = 0.16\text{N}\cdot\text{m}$ に変移している。また、降伏点に達したときに蓄えられていた運動エネルギー $W_t = 4.34\text{N}\cdot\text{m}$ は、最大変位が生じる点 B に至るまでに系内で消費されるエネルギー $W_p = 4.08\text{N}\cdot\text{m}$ と AB 間における 2 次剛性による弾性歪エネルギーの増加分 $W_{e1} = 0.42 - 0.16 = 0.26\text{N}\cdot\text{m}$ に変移していることが分かる。

一方、表 1.2 より、点 A では、インパルスが作用し終わった瞬間に蓄えられた運動エネルギー $W_t = 4.48\text{N}\cdot\text{m}$ から弾性歪エネルギー $W_{e0} = 0.16\text{N}\cdot\text{m}$ 、粘性減衰エネルギー $W_h = 0.15\text{N}\cdot\text{m}$ に変移している。また、降伏点に達したときに蓄えられていた運動エネルギー $W_t = 4.17\text{N}\cdot\text{m}$ は、最大変位が生じる点 B に至るまでに系内で消費されるエネルギー $W_p = 3.03\text{N}\cdot\text{m}$ と AB 間における 2 次剛性による弾性歪エネルギーの増加分 $W_{e1} = 0.30 - 0.16 = 0.14\text{N}\cdot\text{m}$ と粘性減衰エネルギーの増加分 $W_h = 1.00\text{N}\cdot\text{m}$ として変移していることが分かる。表 1.1 と表 1.2 より、減衰が無い場合では蓄えられた運動エネルギーから 2 次剛性による弾性歪エネルギーと系内で消費されるエネルギーに変移していた。減衰が有る場合では、弾性域では初期剛性を持つ弾性歪エネルギーと粘性減衰エネルギーが増加する。

キーワード 歪エネルギー、粘性減衰エネルギー、等価線形系

連絡先 〒680-8550 鳥取県鳥取市湖山町南 4 丁目 101 番地

T E L 0857-31-5288

表 1.1 粘性減衰が無い場合のエネルギーの推移 ($h = 0.00$) ($\times E-10$)

点	時刻(sec)	運動エネルギー W_t	弾性歪エネルギー W_e	系内で消費される エネルギー- W_p	全歪エネルギー(累計)
A'	0.002	4.50	0.00	0.00	0.00
A	0.016	4.34	0.16	0.00	0.16
B	0.398	0.00	0.42	4.08	4.50
C	0.523	0.20	0.22	0.00	4.30
D	0.659	0.00	0.42	0.00	4.50

表 1.2 粘性減衰がある場合のエネルギーの推移 ($h = 0.05$) ($\times E-10$)

点	時刻(sec)	運動エネルギー W_t	弾性歪エネルギー W_e	系内で消費される エネルギー- W_p	全歪エネルギー(累計)	粘性減衰エネルギー W_h
A'	0.002	4.48	0.00	0.00	0.00	0.01
A	0.016	4.17	0.16	0.00	0.16	0.16
B	0.328	0.00	0.30	3.03	3.33	1.16
C	0.457	0.16	0.10	0.00	3.13	1.20
D	0.578	0.00	0.24	0.00	3.27	1.22

また、降伏点で蓄えられた運動エネルギーは最大変位に達したときには系内で消費されるエネルギーと粘性減衰エネルギーの増加分として変移し、粘性減衰エネルギーは累積増加していることが分かった。

3. 本研究で提案する等価線形化法の提案

本研究では、既往の等価線形化法¹⁾で考えられていた履歴減衰による減衰の効果だけでなく粘性減衰による減衰の効果も合わせて考慮できる等価線形系を提案し、非線形最大応答値を等価線形振動系の線形最大応答値で近似することを考えた。

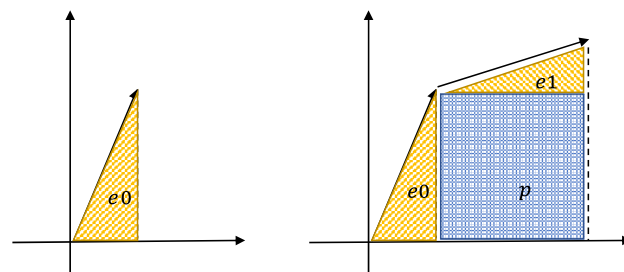


図 2：全歪エネルギーのモデル化 (OA 間, AB 間)

降伏点に達した後の復元力は(1)式で表される。

$$F(x) = \mu kx + ku_y(1 - \mu) \quad (u_y < x) \quad (1)$$

塑性域での歪エネルギーを求めるため、両辺を x で積分すると(2)式が得られる。

$$W_e + W_p = \frac{1}{2} \mu k(x^2 - u_y^2) + ku_y(1 - \mu)(x - u_y) \quad (u_y < x) \quad (2)$$

塑性応答を含む場合であっても変位応答や速度応答の分布がガウス分布で近似できると仮定すると、変位の出現確率に基づく弾性歪エネルギー $\langle W_e \rangle$ と系内で消費される歪エネルギー $\langle W_p \rangle$ の期待値は、それぞれ(3)、(4)式となる。

$$\langle W_e \rangle = \int_0^{u_y} \frac{1}{2} kx^2 p(x) dx + \int_{u_y}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} ku_y^2 + \frac{1}{2} \mu k(x - u_y)^2 \right\} p(x) dx \quad (3)$$

$$\langle W_p \rangle = \int_{u_y}^{\infty} ku_y(x - u_y) p(x) dx \quad (4)$$

また、変位応答のガウス分布 $p(x)$ 、速度応答のガウス分布 $p(v)$ が、それぞれ(5)、(6)式のように表されると仮定する。

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}} \quad (6)$$

変位応答の標準偏差を σ 、速度応答の標準偏差を σ_v と表す。

ここで、本研究で用いる粘性減衰エネルギー W_h は、減衰力 $c\dot{x}$ に変位増分 $\dot{x}dt$ を乗じた面積の足し合わせを表していることから、(7)式のように表す。

$$W_h = \int_0^x c\dot{x} dx = \int_0^t c\dot{x}^2 dt \quad (0 < t < \infty, \quad \because \frac{dx}{dt} = \dot{x}) \quad (7)$$

ここで、最大変位点に達するまでに増加していった粘性減衰エネルギー W_h を速度応答の確率密度関数を用いて表すと、粘性減衰エネルギー $\langle W_h \rangle$ は(8)式となる。ここで、 c は粘性減衰係数[N・s/m]を表す。

$$\begin{aligned} \langle W_h \rangle &= \int_0^\infty c\dot{x}^2 p(v) dv \\ &= \frac{c}{2} \sigma_v^2 \end{aligned} \quad (8)$$

一方、等価剛性 k_{eq} を持つ等価線形系が保存する弾性歪エネルギーは(9)式となる。

$$\begin{aligned} \langle W_{eq} \rangle &= \int_0^\infty \frac{1}{2} k_{eq} x^2 p(x) dx \\ &= \frac{k_{eq}}{4} \sigma^2 \end{aligned} \quad (9)$$

(3)式と(9)式より、等価剛性 k_{eq} を持つ等価線形系に保存される弾性歪エネルギーが図2における最大変位点までに系内に保存される弾性歪エネルギーが等しいとみなすことで、等価剛性 k_{eq} を(10)式のように定義する。こ

で、 η は等価剛性 k_{eq} と初期剛性 k の比であり、 $\gamma = \frac{\sigma}{u_y}$ とすると、 η は(11)式で表すことができる。

$$k_{eq} = k\eta \quad (10)$$

$$\eta = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{2\gamma^2}} + 2 \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\gamma}\right) + \left(\frac{1}{\gamma^2} + 2\mu + \frac{\mu}{\gamma^2}\right) \left\{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\gamma}\right)\right\} \quad (11)$$

また、履歴応答曲線が1サイクル間に系に蓄える最大の歪エネルギー W と系内で消費されるエネルギー ΔW の関係性より、(4)式、(8)式、(9)式を用いて等価減衰定数 h_{eq} を(12)式のように表す。

$$\begin{aligned} h_{eq} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Delta W}{W} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\langle W_p \rangle + \langle W_h \rangle}{\langle W_{eq} \rangle} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\int_{u_y}^\infty k u_y (x - u_y) p(x) dx + \int_0^\infty c v^2 p(v) dv}{\int_0^\infty \frac{1}{2} k_{eq} x^2 p(x) dx} \\ &= \frac{1}{\eta} \cdot \frac{1}{\pi \gamma} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\gamma^2}} - \frac{1}{2\gamma} \left\{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\gamma}\right)\right\} + \frac{c\sigma_v^2}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

4. 等価線形系の精度の検証

提案法による弾塑性地震応答変位の最大値の解析精度の検証をするために、非線形時刻歴応答解析、変位一定則²⁾、エネルギー一定則²⁾、及び本研究で提案した等価線形化法を用いて得られた最大変位応答を、初期剛性の時の周期に基づいて変位応答スペクトルの形で表して比較した。地震波には、KOBEN-S波と KAIHOKU波を用い、減衰定数は2%($h = 0.02$)とした。

一方、それぞれの周期における降伏点は、まず与えられた地震波と減衰定数を用いて線形応答解析を行い、線形最大変位応答値 x_m を求める。求めた線形最大変位応答値 x_m の1/4の値を、それぞれの周期での降伏変位と仮定して非線形時刻歴応答解析を行った。

また、与えられた地震波や解析条件の下で、周期毎に非線形時刻歴応答解析を行い、塑性率 $\gamma^3)$ が3.6~4.4となる場合のみを対象とし、同塑性率を満たさない場合の応答変位は0として、変位応答スペクトルにプロットした。

提案した等価線形化法では、剛性低下率 μ 、塑性率 γ 、そして降伏変位 u_y から、等価減衰定数 h_{eq} 、等

価固有円振動数 ω_{eq} を算出し、それらを用いて線形時刻歴応答解析を行い等価線形系の最大変位応答値 x_{eq} と最大速度応答値 v_{eq} を求める。そして、変位と速度の最大値の期待値が 3σ 、 $3\sigma_v$ であるとして等価剛性 k_{eq} や等価減衰定数 h_{eq} を求めた。図3、図4は剛性低下率 $\mu = 0.01$ 、減衰定数 $h = 0.02$ における結果を表す。

図3と図4より、提案法は、1秒以下の周期ではエネルギー一定則、1秒以上の周期では変位一定則に近い結果となった。更に、非線形時刻歴応答解析の結果にも近い結果を示すことが分かった。ただし、2秒以上の周期では、非線形時刻歴応答解析の結果が欠損している部分が多いため、解析精度の考察は難しいと考えた。

今後は、降伏変位や塑性率の設定を変更して、本提案法の適用範囲を確認する必要がある。更に、今回提案した等価線形化法では速度応答の分布はガウス分布に従うと仮定し、粘性減衰エネルギー $\langle W_h \rangle$ を求めたが、速度と変位の関係を用いて、粘性減衰エネルギー $\langle W_h \rangle$ を簡易的に表現することを考えて、定式化の見直しを行う。

参考文献

- 1) 西樂大輝：等価線形系を用いた多自由度弾塑性系の地震応答の近似解析法の提案 鳥取大学修士論文 2015
- 2) 柴田明德：最新耐震構造解析 第3版 森北出版株式会社 pp38~pp144 2014
- 3) 道路橋示方書・同解説 V 耐震設計編 社団法人 日本道路協会 pp210~pp228 2002

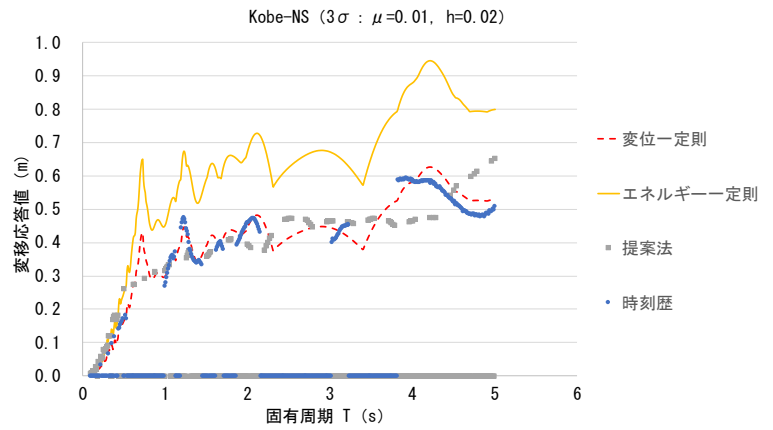


図3：変位応答スペクトル (KOBEN-S波)

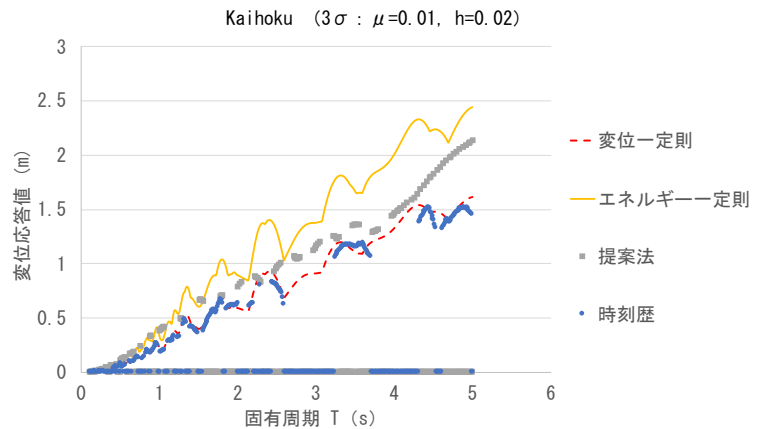


図4：変位応答スペクトル (KAIHOKU波)