

減衰地震応答を非減衰地震応答の重ね合わせで得ること に基づく応答スペクトル減衰補正法の開発

鳥取大学 学生会員 ○海江田 巧
鳥取大学 正会員 谷口 朋代
鳥取大学 正会員 小野 祐輔

1. 序

耐震設計において地震荷重を算定する際、簡単のために応答スペクトルを用いる場合がある。応答スペクトルは予め作成する必要があるが、実際の設計において与えられている応答スペクトルの例として、道路橋示方書に示される、減衰定数 5% のときの 1 自由度-バネ質点系(SDOF)の最大応答を表すものがある。しかし、設計する構造物は減衰定数 5% のものばかりではないので、所要の減衰による応答となるように応答スペクトル値を適宜補正する必要がある。現在、応答スペクトルの減衰補正方法として、統計的に求められた係数 Cd を用いる方法¹⁾(以下 Cd 法)がある。Cd 法による減衰補正は、ある周期の減衰定数 5% の最大応答に任意の減衰定数に基づく係数を乗じて、任意の減衰定数の最大応答を簡便に算定するものである。しかし、減衰補正した最大応答は時刻歴応答(THA)の最大値と比べると精度が悪い²⁾。

そこで本研究では、Cd 法に代わる簡便かつ精度良い減衰補正式を開発することを目的とする。

2. 非減衰地震応答の重ね合わせによる減衰地震応答の表現

地震応答を Duhamel 積分で表現する際、地動加速度をインパルスの集合と考えると、各インパルスに対応する応答を畳み込み積分する。そこであるインパルス $\ddot{z}(\tau)$ が、固有円振動数 n_0 、減衰定数 h_1 の SDOF に作用した時の応答を、フーリエ変換を用いて正弦波、余弦波のフーリエ級数で表すと(1)式を得る(図-1 参照)。

Keywords: 応答スペクトル, 減衰補正式, フーリエ級数
連絡先: 〒680-8550 鳥取市湖山町南 4 丁目 101

TEL0857-31-5288

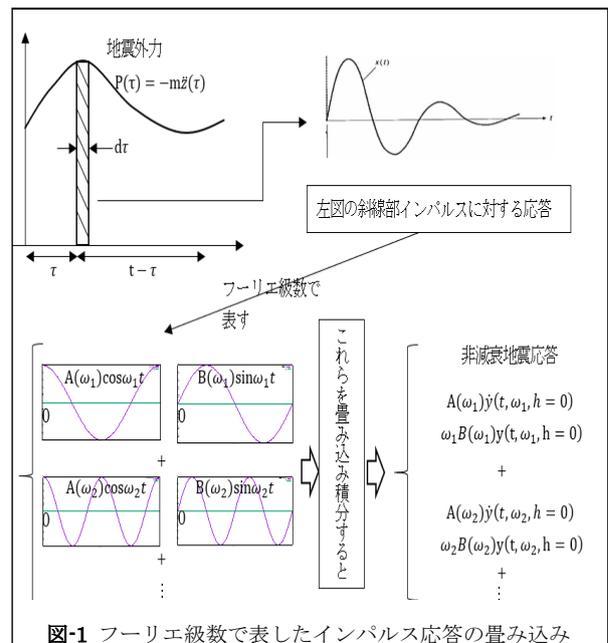


図-1 フーリエ級数で表したインパルス応答の畳み込み

$$y_\tau(\tau) = -\ddot{z}(\tau)dt \cdot \frac{1}{n'} e^{-h_1 n_0(t-\tau)} \text{sinn}'(t-\tau) u(t-\tau)$$

$$= -\ddot{z}(\tau)dt$$

$$\cdot \frac{1}{\pi} \left[\frac{A(\omega_0)}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ A(\omega_i) \cos \omega_i(t-\tau) \right\} \right] \Delta\omega$$
(1)

$$n' = n_0 \sqrt{1 - h_1^2}, \omega_i = \frac{2i\pi}{T}, \Delta\omega = \omega_{i+1} - \omega_i = \frac{2\pi}{T},$$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & (t-\tau \geq 0) \\ 0 & (t-\tau < 0) \end{cases}$$

ここで、SDOF の単位インパルス応答の

$$\text{フーリエ余弦変換} A(\omega_i) = \frac{n_0^2 - \omega_i^2}{(n_0^2 - \omega_i^2)^2 + 4h_1^2 n_0^2 \omega_i^2}$$

$$\text{フーリエ正弦変換} B(\omega_i) = \frac{2h_1 n_0 \omega_i}{(n_0^2 - \omega_i^2)^2 + 4h_1^2 n_0^2 \omega_i^2}$$

t: 時間, $y_\tau(\tau)$: インパルス応答, $\ddot{z}(t)$: 地動加速度, n_0 : 固有円振動数, h_1 : 減衰定数, ω_i : 角周波数, T: フーリエ変換する関数の周期, である。

この(1)式で与えられる各インパルスごとの応答であるフーリエ級数を Duhamel 積分と同様に畳み込み積分すると、時刻歴応答 $y(t, n_0, h_1)$ は、

$$y(t, n_0, h_1) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{A(\omega_0)}{2} \int_0^t \{-\ddot{z}(\tau)\} d\tau + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \left[A(\omega_i) \{-\ddot{z}(\tau) \cos \omega_i(t-\tau)\} + B(\omega_i) \{-\ddot{z}(\tau) \sin \omega_i(t-\tau)\} \right] d\tau \right] \Delta\omega$$

となり、Duhamel 積分によって与えられる非減衰速度、変位応答は $\dot{y}(t, \omega_i, h_{=0}) = \int_0^t \{-\ddot{z}(\tau) \cos \omega_i(t-\tau)\} d\tau$ 、 $y(t, \omega_i, h_{=0}) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \{-\ddot{z}(\tau) \sin \omega_i(t-\tau)\} d\tau$ であるので式(2a)、(2b)を得る。

$$y(t, n_0, h_1) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{A(\omega_0)}{2} \dot{y}(t, \omega_0, h_{=0}) + \sum_{i=1}^{\infty} [A(\omega_i) \dot{y}(t, \omega_i, h_{=0}) + \omega_i B(\omega_i) y(t, \omega_i, h_{=0})] \right] \Delta\omega \quad (2a)$$

$$y(t, n_0, h_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \dot{y}(t, \omega, h_{=0}) + \omega B(\omega) y(t, \omega, h_{=0})] d\omega \quad (2b)$$

結局(2a)、(2b)式は、ある固有円振動数 n_0 およびある減衰定数 h_1 を有する SDOF のある地震動に対する時刻歴地震応答が、同じ地震動を受ける固有円振動数 ω_i および減衰定数 0% を有する SDOF の時刻歴地震応答に、単位インパルス応答のフーリエ変換に基づく係数を乗し、その角周波数 ω_i ごとの無数の重ね合わせで得られることを示す。

3. 最大応答の評価

固有円振動数 ω_i を持ち、非減衰の SDOF の時刻歴地震速度応答 $\dot{y}(t, \omega_i, h_{=0})$ および変位応答 $y(t, \omega_i, h_{=0})$ の最大値から、固有円振動数 n_0 、減衰

定数 h_1 を有する SDOF の時刻歴変位地震応答 $y(t, n_0, h_1)$ の最大値を得ることを試みる。

(2a)式の両辺を2乗して時間平均をとり、固有円振動数 n_0 、減衰定数 h_1 を有する SDOF の変位応答の2乗平均を $\sigma_D^2(n_0, h_1)$ とすると

$$\begin{aligned} \sigma_D^2(n_0, h_1) &= \frac{\Delta\omega^2}{\pi^2} E \left[\sum_{i=1}^{\infty} A(\omega_i)^2 \dot{y}(t, \omega_i, h_{=0})^2 + \omega_i^2 B(\omega_i)^2 y(t, \omega_i, h_{=0})^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \omega_i A(\omega_i) B(\omega_i) \dot{y}(t, \omega_i, h_{=0}) y(t, \omega_j, h_{=0}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \{A(\omega_i) \dot{y}(t, \omega_i, h_{=0}) + \omega_i B(\omega_i) y(t, \omega_i, h_{=0})\} \times \{A(\omega_j) \dot{y}(t, \omega_j, h_{=0}) + \omega_j B(\omega_j) y(t, \omega_j, h_{=0})\} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

となる。

ここで、便宜的に、(3)式における第2項および第3項の時間平均は0であるとすると、このとき近似的に与えられる変位応答の2乗平均 σ_D^2 を改めて $\sigma_1^2_D$ 、またTHAの2乗の時間平均を σ_0^2 として、(3)式を書き換えて(4)式とする。

$$\sigma_1^2_D(n_0, h_1) \doteq \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} [A(\omega_i)^2 \sigma_0^2(\omega_i, h_{=0}) + \omega_i^2 B(\omega_i)^2 \sigma_0^2(\omega_i, h_{=0})] \Delta\omega^2 \quad (4)$$

ここで、 $\sigma_1^2_D(n_0, h_1)$:固有円振動数 n_0 、減衰定数 h_1 を有する SDOF の変位応答の2乗平均の近似値 $\sigma_0^2(\omega_i, h_{=0}) = E[\dot{y}(t, \omega_i, h_{=0})^2]$ 、 $\sigma_0^2(\omega_i, h_{=0}) = E[y(t, \omega_i, h_{=0})^2]$:固有円振動数 ω_i 、減衰定数 h_1 を有する SDOF の速度、変位応答(THA)の2乗平均であり、(4)式の精度検証は後に4節に示す。

またここで、速度および変位の時刻歴応答の時間平均が0でその確率密度関数が正規分布に従うと仮定し、標準偏差を σ とする。どの固有円振動数、減衰定数を有する SDOF の応答でも、一律に応答がある超過確率 $\text{Prob}[-a\sigma \leq x \leq a\sigma]$ のう

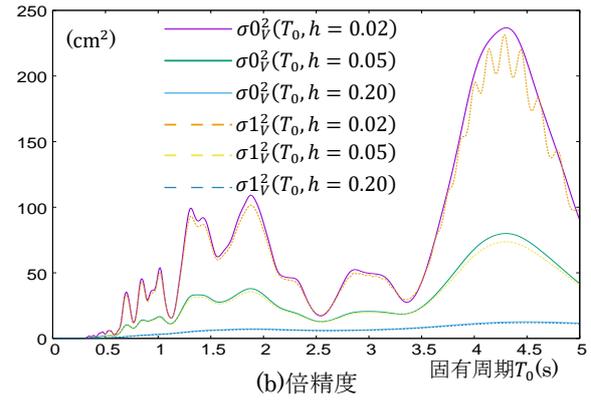
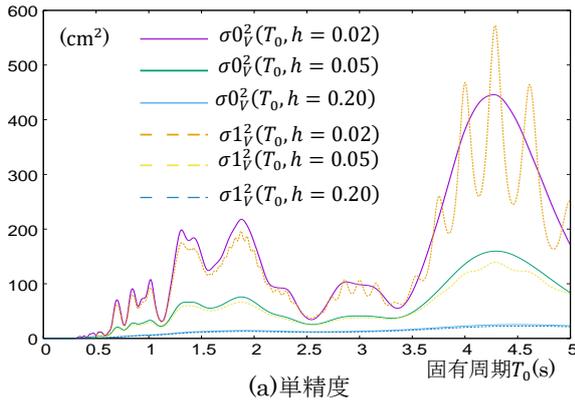


図-2 $\sigma_{1D}^2(n_0, h_1)$ と $\sigma_{0D}^2(n_0, h_1)$ の比較

ちに収まるとして、標準偏差を用いて速度と変位の最大応答値を $\dot{y}_{max} = a\sigma_v, y_{max} = a\sigma_D$ と与えられるとする。

そこで、(4)式の応答の2乗平均 $\sigma_{0D}^2(\omega_i, h_{=0})$, $\sigma_{0D}^2(\omega_i, h_{=0})$ および $\sigma_{1D}^2(n_0, h_1)$ を、それぞれ $\dot{y}_{max}(\omega_i, h_{=0})/a$, $y_{max}(\omega_i, h_{=0})/a$ および $y_{max}(n_0, h_1)/a$ で近似して(5a)が得られ、更に $\dot{y}_{max}(\omega_i, h_{=0}) \equiv \omega_i y_{max}(\omega_i, h_{=0})$ と近似して(5b)式を得る。

$$y_{max} \equiv \frac{1}{\pi} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{A(\omega_i)^2 \dot{y}_{max}^2(\omega_i, h_{=0})}{+\omega_i^2 B(\omega_i)^2 y_{max}^2(\omega_i, h_{=0})} \right] \Delta\omega} \quad (5a)$$

$$y_{max} \equiv \frac{1}{\pi} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} [A(\omega_i)^2 + B(\omega_i)^2] \dot{y}_{max}^2(\omega_i, h_{=0}) \Delta\omega} \quad (5b)$$

4. 非減衰応答の2乗平均の和によって減衰応答の2乗平均を与えることの検証

固有円振動数 n_0 , 減衰定数 $h_1\%$ を有するSDOFのTHAの2乗平均 $\sigma_{0D}^2(n_0, h_1)$ と、(4)式のように固有円振動数 ω_i , 減衰定数0%を有するSDOFのTHAの2乗平均 $\sigma_{0D}^2(\omega_i, h=0)$, $\sigma_{0D}^2(\omega_i, h_{=0})$ の角周波数 ω_i ごとの無数の足し合わせによって得た減衰応答の2乗平均 $\sigma_{1D}^2(n_0, h_1)$ を固有周期ごとに比べる。

減衰定数2%, 5%, 20%それぞれの場合について、神戸NS地震動を用いて検証する(図-2左)。また、フーリエ級数の角周波数 ω_i の周波数領域の積分区間は変えずに分割数を倍(以下倍精度と呼ぶ)

にして、減衰定数2%, 5%, 20%それぞれの場合について、神戸NS地震動を用いて検証する(図-2右)。ただし、 $\Delta\omega = 2\pi/T$ より倍精度となると時間領域において平均をとる時間が2倍になる。そのため2乗平均の値も小さくなる。

図-2(a), (b)を見ると、固有周期が大きくなるほど、固有円振動数 n_0 , 減衰定数 h_1 を有するSDOFのTHAの2乗平均 $\sigma_{0D}^2(n_0, h_1)$ と、(4)式のように固有円振動数 ω_i , 減衰定数0%を有するSDOFのTHAの2乗平均 $\sigma_{0D}^2(\omega_i, h_{=0})$, $\sigma_{0D}^2(\omega_i, h_{=0})$ の角周波数 ω_i ごとの無数の足し合わせによって得た減衰応答の2乗平均 $\sigma_{1D}^2(n_0, h_1)$ とのばらつきが大きくなっている。これは固有周期が大きくなるほど(2a)式で得る重ね合わせ応答の精度が悪くなるためだと思われる。

また、図2-(a)と図-2(b)を比べると、角周波数 ω_i の分割幅 $\Delta\omega$ が小さくなるほど $\sigma_{1D}^2(n_0, h_1)$ が精度よく $\sigma_{0D}^2(n_0, h_1)$ を表すことが予測される。

5. 提案した減衰補正式の検証

神戸NS地震動の応答スペクトルと、(5a)式より求めた最大変位応答を比較する。減衰定数 $h_1 = 0.02$, $h_1 = 0.20$ ごとに、フーリエ角周波数の分割幅 $\Delta\omega$ と倍精度の場合をプロットする(図-3)。

地震動およびその応答の確率密度関数は本来正規分布に従うと限らず、地震動は確率論的な立場から不規則振動とはいえない。しかし(4)式においてSDOFの地震応答をSDOFのパラメータに関わらず一定の超過確率で最大応答に達すると仮定した。さらに応答の標準偏差のa倍(aが一

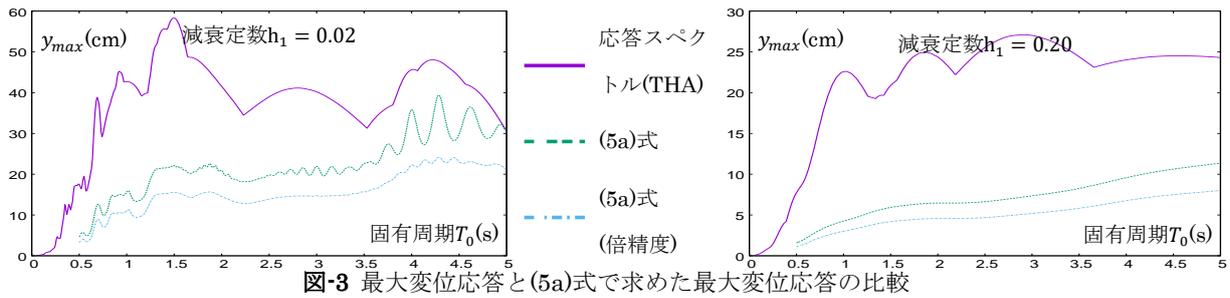


図-3 最大変位応答と(5a)式で求めた最大変位応答の比較

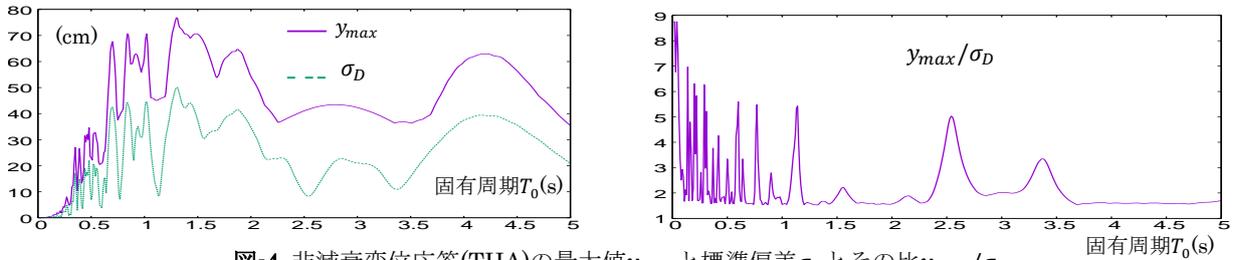


図-4 非減衰変位応答(THA)の最大値 y_{max} と標準偏差 σ_D とその比 y_{max}/σ_D

定)と与えた応答の最大値を、それらの2乗和平方根をとって(5a)式を得た為、図-3のように応答スペクトルと(5a)式より求めた最大変位応答に大きな差が出たと考えられる。

ここで、(5)式の導出の際にどの固有円振動数を有するSDOFの応答でも一律に、応答がある超過確率 $\text{Prob}[-a\sigma \leq x \leq a\sigma]$ (a :任意の定数, σ :応答の標準偏差)のうちに収まるとしてTHAより求める変位の最大値を $y_{max} = a\sigma$ と与えることの是非について検討する。

THAより求めた変位の最大値 y_{max} および標準偏差 σ_D を固有周期ごとにプロットし(図-4左)、また比 y_{max}/σ_D を固有周期ごとにプロットする(図-4右)。図-4左より最大値 y_{max} と標準偏差 σ_D の概形は似ているが、図-4右の比 y_{max}/σ_D を見ると2~5の幅がある。(5)式は、応答の最大応答値を $y_{max} = a\sigma_D$ (a が一定)と与えるという仮定の下に成り立っている。このことから(5)式の精度が劣る理由は、図-4に示される比 y_{max}/σ_D のばらつきが原因であると考えられる。

6. まとめ

本研究では、減衰地震応答を非減衰地震応答の重ね合わせで得ることに基づいて、応答の最大値 y_{max} を $a\sigma_D$ と与えることを用い、便宜的に減衰応答の最大値を非減衰応答の最大値から算定した。

本研究で提案した応答スペクトルの減衰補正

式(5)を導出する一段階前の式(4)の検証を4節で行い、(4)式で近似的に与えられた減衰応答の2乗平均 $\sigma_D(n_0, h_1)$ はTHAの2乗平均を概ね表せることを示した。しかし(5)式では、図-4に示すように、どの固有円振動数を有するSDOFの応答でも一律に、応答がある超過確率 $\text{Prob}[-a\sigma \leq x \leq a\sigma]$ (a :任意の定数, σ :応答の標準偏差)のうちに収まるとしてTHAより求まる変位の最大値を $y_{max} = a\sigma$ と与えることはあまり適切でないため、(5)式による減衰応答の近似の精度が劣ることを示した。

応答スペクトルの減衰補正式は、道路橋示方書によって与えられている減衰定数5%の応答スペクトルが基準となる。そのため減衰地震応答を減衰地震応答の重ね合わせで得る方法を提案することを今後の課題とする。

参考文献

- 1) 日本道路協会:道路示方書・同解説, V 耐震設計編, pp12-29, 2002. 3.
- 2) 横川英彰, 阿部雅人, 吉田純司, 不規則振動論による応答スペクトルの減衰補正, 土木学会地震工学論文集, 2003.
- 3) 松下泰雄:フーリエ解析—基礎と応用—, pp. 1-32, pp61-83, 培風館, 2001.
- 4) 1 柴田明徳:最新耐震構造解析第2版, pp168-191, 森北出版, 2003.