剛基盤上の非線形弾性層内を伝播する非線形 SH 波について

Y 数理工学研究所　正会員　吉田　隆千代

１．はじめに

1983 年日本海中部地震の際，北海道某所で奇妙な地震波が観測された．その形状は，紡錘状の包絡線の中に正弦波が閉じ込められたようであり，当時物理学の分野で盛んに研究されていた非線形波動の一形態である包絡ソリトンのように見えた．何か新しい発見をしたような気がして，機会があればぜひ研究してみたいと思ったが，本務に忙殺され，長い間放置していた．

最近，Teymur ら [1]によって 2 層地盤における非線形 SH 波の伝播問題が研究されていたことを知った．彼らは，剛な基盤上に堆積した均質で等方的な非線形弾性層を想定し，その中を伝播する非線形 SH 波を考えた．そして，摂動法を用いることにより，非線形性と分散性の釣り合いから，波の非線形自己変調を表す非線形*Schrödinger*方程式(NLS 方程式)が導かれることを示した．そこで，本稿では，はじめに Teymur ら [1]に基いて NLS 方程式の導出を行った．最後に，北海道で観測された地震波への適用性について言及した．

２．問題の定式化

物体の運動と変形を物質座標 (X_1, X_2, X_3) と空間座標 (x_1, x_2, x_3) で表す．ここで，X_2=0 と X_2=h に挟まれた一様厚さ h の層を考える．X_2=h は自由表面であり，X_2=0 は剛な境界である．X_3 方向に変位し，X_1 方向に伝播する SH 波の運動は次式のように表される．

$$x_k = X_K \delta_{kK} + u_3(X_1, X_2, t)\delta_{k3} \tag{1}$$

ここに,u_3 は X_3 方向の変位，t は時間, δ_{kK}, δ_{k3} はクロネッカーのデルタである．なお, 大文字の添字は物質座標を表し, 小文字の添字は空間座標を表す. 応力の釣合式はつぎのようである．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial X_3} = 0\\
&\frac{\partial T_{12}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{32}}{\partial X_3} = 0\\
&\frac{\partial T_{13}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial X_3} = \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2}$$

ここに，T_{ij} は X_i 面に作用する X_j 方向の応力テンソルであり，ρ は地盤材料の密度である．

自由表面では応力が 0 であり，剛境界では変位が 0 であるから，それぞれの境界における境界条件はつぎのように与えられる．

$$T_{2k} = 0 \quad on \quad X_2 = h \tag{3}$$

$$u_3 = 0 \quad on \quad X_2 = 0 \tag{4}$$

層の構成材料が均質で等方的な非線形弾性体であるとすると，材料の応力構成式はつぎのように表される．

$$T_{Kk} = \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}\delta_{LK} + 2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}E_{LK} + 3\frac{\partial\Sigma}{\partial I_3}E_{LM}E_{MK}\right)\frac{\partial x_k}{\partial X_L} \tag{5}$$

ここに,$E = E_{IJ}$ は Green-Lagrange ひずみテンソルである．Σ はひずみエネルギー関数であり，等方性材料ではつぎに示すE の不変量の関数になる．

$$I_1 = trE, \quad I_2 = trE^2, \quad I_3 = trE^3 \tag{6}$$

(1)の変形場ではE の不変量は下式のように表される．

$$I_1 = Q/2, \quad I_2 = Q(1+Q/2)/2, \quad I_3 = Q^2(3+Q)/8 \tag{7}$$

ここに，

$$Q = \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)^2 \tag{8}$$

である．これらを用いると(5)はつぎのようになる．

$$\begin{aligned}
&T_{\Delta\beta} = \left[\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}\delta_{\Omega\Delta} + \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2} + \frac{3}{4}(1+Q)\frac{\partial\Sigma}{\partial I_3}\right)\frac{\partial u_3}{\partial X_\Omega}\frac{\partial u_3}{\partial X_\Delta}\right]\delta_{\beta\Omega}\\
&T_{\Delta 3} = 2\frac{\partial\Sigma}{\partial Q}\frac{\partial u_3}{\partial X_\Delta}, \quad T_{3\alpha} = -\frac{\partial u_3}{\partial X_\Delta}T_{\Delta\alpha} + \delta_{\alpha\Delta}T_{\Delta 3}\\
&T_{33} = \frac{\partial\Sigma}{\partial I_1} + \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2} + \frac{3}{4}(1+Q)\frac{\partial\Sigma}{\partial I_3}\right)Q
\end{aligned} \tag{9}$$

ここに，ギリシャ文字の添字は(1,2)を表す．

つぎに，ひずみエネルギー関数ΣをEの不変量 I_i を用いて 4 次多項式に展開する．

$$\begin{aligned}
\Sigma = &\alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_1^3 + \alpha_4 I_1 I_2 + \alpha_5 I_3 + \alpha_6 I_1^4\\
&+ \alpha_7 I_1^2 I_2 + \alpha_8 I_1 I_3 + \alpha_9 I_2^2
\end{aligned} \tag{10}$$

ここに，$\alpha_1 = \lambda/2, \alpha_2 = \mu$は 2 次の（$\lambda$，$\mu$ はラメの定数），$\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$は 3 次の，$\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$は 4 次の弾性定数である．3 次と 4 次の弾性定数は非線形弾性特性を表す．ひずみエネルギー関数Σは，不変量が(7)で与えられるならば次式を満足しなければならない．

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\Sigma}{\partial I_2} + \frac{3}{4}(1+Q)\frac{\partial\Sigma}{\partial I_3} = 0 \tag{11}$$

キーワード　非線形 SH 波，非線形 *Schrödinger* 方程式，非線形自己変調，摂動法，多重スケール法，包絡ソリトン

連絡先　〒733-0035　広島市西区南観音 7 丁目 3 番 1-401 号　TEL(082)295-1911

(10)を(9)に代入し(11)を適用すると(2)の 3 番目の式はつぎのようになる.

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - c_T{}^2\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_2^2}\right) = n_T\left[\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}Q\right) + \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}Q\right)\right] \quad (12)$$

ここに, c_T はせん断波速度($c_T^2 = \mu/\rho$)である. また, n_T は非線形材料定数であり, 地盤材料の非線形特性を表す. $n_T > 0$ のとき地盤材料はせん断硬化性を示し, $n_T < 0$のときせん断軟化性を示す.

ここで, $X = X_1, Y = X_2, u = u_3$ と置く. 変形勾配の中に 3 次以上の項を含まない近似支配方程式と境界条件はつぎのように表される.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_T^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) = n_T\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial X}Q(u)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}Q(u)\right)\right] \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y}\left(1 + \frac{n_T}{c_T^2}Q(u)\right) = 0 \quad on \quad Y = h \quad (14)$$

$$u = 0 \quad on \quad Y = 0 \quad (15)$$

３．非線形 SH 波の漸近解析

非線形 SH 波の緩やかに変動する振幅が, 非線形自己相互作用によってどのように変調していくかについて, 摂動法を用いて調べる. X, Y, t の代わりに多重スケール法に基づく以下の新しい変数を導入する.

$$x_i = \varepsilon^i X, \quad t_i = \varepsilon^i t, \quad y = Y \quad (i = 0,1,2,\cdots) \quad (16)$$

ここに, $\varepsilon > 0$は微小パラメータである. $\{x_0, t_0, y\}$は, 速い変動を表す変数である. $\{x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots\}$は, 緩やかな変動を表す変数である (以下, ゆっくり変数とよぶ). いま, u をこれらの新しい変数の関数とみなし, ε に関するつぎのような漸近級数に展開する.

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, \cdots, y, t_0, t_1, t_2, \cdots) \quad (17)$$

ここでは, 1 次の漸近解を得ることを目的とする. したがって, u_n は$\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$のみに依存すると仮定する. はじめに, (13)の運動方程式と, (14)(15)の境界条件を新しい変数で記述する. つぎに, それらに(17)を代入し, ε の同じ冪の項を集める. なお, X と t の微分に関する多重スケールへの変換はつぎのようである.

$$\frac{\partial}{\partial X} = \sum_{n=0}^{2} \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{n=0}^{2} \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n} \quad (18)$$

ε の 3 次の項までは以下のように表される.

$O(\varepsilon^1)$:

$$Lu_1 \equiv \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0^2} - c_T^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad on \quad y = h \quad (20)$$

$$u_1 = 0 \quad on \quad y = 0 \quad (21)$$

$O(\varepsilon^2)$:

$$Lu_2 = 2\left(c_T^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_0 \partial x_1} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0 \partial t_1}\right) \quad (22)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad on \quad y = h \quad (23)$$

$$u_2 = 0 \quad on \quad y = 0 \quad (24)$$

$O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned} Lu_3 &= 2\left(c_T^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_0 \partial x_1} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t_0 \partial t_1}\right) \\ &+ c_T^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_0 \partial x_2}\right) - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2} - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0 \partial t_2} \\ &+ n_T\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0}K(u_1)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}K(u_1)\right)\right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{n_T}{c_T^2}K(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad on \quad y = h \quad (26)$$

$$u_3 = 0 \quad on \quad y = 0 \quad (27)$$

ここに,

$$K(u_1) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 \quad (28)$$

摂動問題は各ステップ内では線形である. ここで(19)について考える. 層内に SH 波が存在するためには, 位相速度 c は, つぎの不等式を満足しなければならない.

$$c > c_T \quad (29)$$

ここでは, SH 波の位相速度は上記の不等式を満足すると仮定する. 変数分離法を用いると(19)の解はつぎのようになる.

$$u_1 = \left\{A_1(x_1, x_2, t_1, t_2)e^{ikpy} + B_1(x_1, x_2, t_1, t_2)e^{-ikpy}\right\}e^{i\phi} + c.c. \quad (30)$$

$$p = \left(c^2/c_T^2 - 1\right)^{1/2}, \quad \phi = kx_0 - \omega t_0 \quad (31)$$

ここに, A_1, B_1はゆっくり変数の 1 次振幅関数である. また, k は波数, ωは角周波数, $c.c$ は複素共役を表す.

(30)を境界条件(20)(21)に代入すると次式が得られる.

$$WU_1 = \{0\} \quad (32)$$

ここに,

$$W = \begin{bmatrix} ikpe^{ikph} & -ikpe^{-ikph} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$U_1 = \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

W は分散マトリクスであり，U_1 は 1 次振幅ベクトルである． $\det W = 0$ は線形 SH 波の分散関係を与える．

$$\cos(kph) = 0 \tag{35}$$

(35)から次式が得られる．

$$kph = (2n-1)\frac{\pi}{2} \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{36}$$

n は分散関係のモード次数である．(36)はつぎのように表される．

$$\frac{c^2}{c_T^2} = 1 + \left[\frac{(2n-1)\pi}{2kh}\right]^2, \quad \omega^2 = k^2 c_T^2 \left\{1 + \left[\frac{(2n-1)\pi}{2kh}\right]^2\right\} \tag{37}$$

(32)の解はつぎのように表される．

$$U_1 = A_1(x_1, x_2, t_1, t_2)R \tag{38}$$

R はベクトルであり次式を満足する．

$$WR = \{0\} \tag{39}$$

$$R = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{2ikph} \end{Bmatrix} \tag{40}$$

1 次解はつぎのように与えられる．

$$u_1 = A_1(x_1, x_2, t_1, t_2)[2i\sin(kpy)]e^{i\phi} + c.c. \tag{41}$$

(41)と線形 SH 波解は同じ形をしているようにみえる．しかし，線形 SH 波解の振幅が定数であるのに対し，(41)の振幅は非線形自己変調を表す緩やかに変動する関数である．この点において両者は異なっている．非線形 SH 波の 1 次解を完成するには,A_1 が決定されなければならない．そのためにはより高次の摂動問題を調べる必要がある．(41)を(22)に代入すると，2 次の摂動問題ができる．

$$Lu_2 = 2i\left(\omega\frac{\partial A_1}{\partial t_1} + kc_T^2\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\right)\left(e^{ikpy} + e^{ikp(2h-y)}\right)e^{i\phi} + c.c. \tag{42}$$

(42)の解をつぎのように分解する．

$$u_2 = \bar{u}_2 + \tilde{u}_2 \tag{43}$$

$\bar{u}_2$ は非同次方程式(42)の特解である．$\tilde{u}_2$ はつぎの同次方程式の解である．

$$L\tilde{u}_2 = 0 \tag{44}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \qquad on \quad y = h \tag{45}$$

$$\tilde{u}_2 = -\bar{u}_2 \qquad on \quad y = 0 \tag{46}$$

非同次方程式(42)の特解は未定係数法によりつぎのように得られる．

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{kpc_T^2}\left(\omega\frac{\partial A_1}{\partial t_1} + kc_T^2\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\right)\left(-e^{ikpy} + e^{ikp(2h-y)}\right)ye^{i\phi} + c.c. \tag{47}$$

(44)の解は 1 次問題と同様につぎのように書ける．

$$\tilde{u}_2 = \left\{A_2(x_1, x_2, t_1, t_2)e^{ikpy} + B_2(x_1, x_2, t_1, t_2)e^{-ikpy}\right\}e^{i\phi} + c.c. \tag{48}$$

ここに，A_2, B_2 はゆっくり変数の 2 次振幅関数である．(47)(48)を(45)(46)の境界条件に代入すると次式が得られる．

$$WU_2 = b_2 \tag{49}$$

ここに，

$$U_2 = \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} \tag{50}$$

$$b_2 = \begin{Bmatrix} \dfrac{2ih}{c_T^2}\left(\omega\dfrac{\partial A_1}{\partial t_1} + kc_T^2\dfrac{\partial A_1}{\partial x_1}\right)e^{ikph} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{51}$$

b_2 はつぎのように表される．

$$b_2 = -i\left[\frac{\partial A_1}{\partial t_1}\frac{\partial W}{\partial \omega} - \frac{\partial A_1}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial k}\right]R \tag{52}$$

$\det W = 0$ かつ，$b_2 \neq \{0\}$ であるので，(49)が U_2 について解けるためには，つぎの条件を満足しなければならない．

$$M^T b_2 = 0 \tag{53}$$

M はつぎのように定義される．

$$M^T W = \{0\}^T \tag{54}$$

(54)より，

$$M = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i \\ kpe^{ikph} \end{Bmatrix} \tag{55}$$

(53)から次式が得られる．

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_1} + V_g\frac{\partial A_1}{\partial x_1} = 0 \tag{56}$$

ここに，V_g は群速度である．

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = -\left(M^T\frac{\partial W}{\partial k}R\right)\Big/\left(M^T\frac{\partial W}{\partial \omega}R\right) \tag{57}$$

(56)はつぎのことを示している．1 次振幅関数 A_1 は群速度 V_gとともに移動する座標系の中では一定である．すなわち，$A_1 = A_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2)$ である．U_2 はつぎのように表される．

$$U_2 = A_2 R - i\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial R}{\partial k} + V_g\frac{\partial R}{\partial \omega}\right) \tag{58}$$

ここでは 1 次解を得ることを目的としており，そのためには A_2 が明示的に計算される必要はなく，A_1 の決定で十分である．そこで，以下では A_2 を省略する．1 次解と 2 次解を(25)に代入すると次式が得られる．

$$\begin{aligned} Lu_3 = \big[&(C_1 + C_2 y)e^{ikpy} + (C_3 + C_4 y)e^{-ikpy} \\ &+ C_5 e^{3ikpy} + C_6 e^{-3ikpy}\big]e^{i\phi} + c.c. + terms \;\; in(e^{\pm 3i\phi}) \end{aligned} \tag{59}$$

ここに,

$$C_1 = 2i\left(\omega\frac{\partial A_1}{\partial t_2} + kc_T^2\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) + c_T^2\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial t_1^2}$$
$$- n_T k^4\left(9p^4 + 2p^2 + 9\right)\left|A_1\right|^2 A_1$$
$$C_2 = -\frac{2i}{kpc_T^2}\left(\omega^2\frac{\partial^2 A_1}{\partial t_1^2} + 2\omega kc_T^2\frac{\partial^2 A_1}{\partial t_1\partial x_1} + k^2c_T^4\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2}\right)$$
$$C_3 = C_1e^{2ikph},\quad C_4 = -C_2e^{2ikph}$$
$$C_5 = n_T k^4\left(9p^4 - 2p^2 - 3\right)e^{-2ikph}\left|A_1\right|^2 A_1 \tag{60}$$
$$C_6 = n_T k^4\left(9p^4 - 2p^2 - 3\right)e^{4ikph}\left|A_1\right|^2 A_1$$

右辺最終項は 3 次の搬送波 $e^{\pm 3i\phi}$ に比例する項である.

u_3 をつぎのように分解する.

$$u_3 = \bar{u}_3 + \tilde{u}_3 \tag{61}$$

ここに, $\bar{u}_3$ は(59)の特解であり, $\tilde{u}_3$ はつぎの同次方程式の解である.

$$L\tilde{u}_3 = 0 \tag{62}$$
$$\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial y} = -\frac{\partial\bar{u}_3}{\partial y} - \frac{n_T}{c_T^2}K(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial y}\quad on\quad y = h \tag{63}$$
$$\tilde{u}_3 = -\bar{u}_3\quad on\quad y = 0 \tag{64}$$

(59)の特解は未定係数法によりつぎのように得られる.

$$\bar{u}_3 = \left(D_1 + D_2y\right)ye^{ikpy} + \left(D_3 + D_4y\right)ye^{-ikpy}$$
$$+ D_5e^{3ikpy} + D_6e^{-3ikpy} \tag{65}$$

ここに,

$$D_1 = \frac{iC_1}{2kpc_T^2} - \frac{C_2}{4k^2p^2c_T^2},\quad D_2 = \frac{iC_2}{4kpc_T^2}$$
$$D_3 = -\frac{iC_3}{2kpc_T^2} - \frac{C_4}{4k^2p^2c_T^2},\quad D_4 = -\frac{iC_4}{4kpc_T^2} \tag{66}$$
$$D_5 = \frac{C_5}{8k^2p^2c_T^2},\quad D_6 = \frac{C_6}{8k^2p^2c_T^2}$$

(62)の解はつぎのように表される.

$$\tilde{u}_3 = \left\{A_3\left(x_1,x_2,t_1,t_2\right)e^{ikpy} + B_3\left(x_1,x_2,t_1,t_2\right)e^{-ikpy}\right\}e^{i\phi}$$
$$+ c.c. \tag{67}$$

ここに, A_3, B_3 はゆっくり変数の 3 次振幅関数である.

$u_1, u_2, \bar{u}_3$ と境界条件(63)(64)を用いると次式が得られる.

$$WU_3 = b_3 \tag{68}$$

ここに,

$$U_3 = \begin{Bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{Bmatrix} \tag{69}$$

b_3 はつぎのように表される.

$$b_3 = -i\left(\frac{\partial W}{\partial\omega}\frac{\partial A_1}{\partial t_2} - \frac{\partial W}{\partial k}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)R$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t_1^2} - 2\frac{\partial^2 W}{\partial\omega\partial k}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1\partial t_1} + \frac{\partial^2 W}{\partial k^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2}\right)R \tag{70}$$
$$+ \left(\frac{\partial W}{\partial k}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial W}{\partial\omega}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1\partial t_1}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial k} + V_g\frac{\partial R}{\partial\omega}\right) + F\left|A_1\right|^2 A_1$$

ベクトル F の成分はつぎのとおりである.

$$F_1 = -i\frac{n_Tk^4h}{c_T^2}\left(9p^4 + 2p^2 + 9\right)\sin(kph),\quad F_2 = 0 \tag{71}$$

$\det W = 0$ かつ, $b_3 \neq \{0\}$ であるので, (68)が U_3 について解けるためには, つぎの条件を満足しなければならない.

$$M^Tb_3 = 0 \tag{72}$$

(72)から次式が得られる.

$$i\left(\frac{\partial A_1}{\partial t_2} + V_g\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) + \tilde{\Gamma}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta}\left|A_1\right|^2 A_1 = 0 \tag{73}$$

ここに,

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2}\frac{dV_g}{dk} = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2},\quad \tilde{\Delta} = -M^TF\Big/\left(M^T\frac{\partial W}{\partial\omega}R\right) \tag{74}$$

無次元変数と無次元定数を導入する.

$$\tau = \omega t_2,\quad \xi = k\left(x_1 - V_gt_1\right),\quad A = kA_1$$
$$\Gamma = k^2\tilde{\Gamma}/\omega,\quad \Delta = \tilde{\Delta}/\left(\omega k^2\right) \tag{75}$$

(73)は, 標準 NLS 方程式としてつぎのように表される.

$$i\frac{\partial A}{\partial\tau} + \Gamma\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2} + \Delta\left|A\right|^2 A = 0 \tag{76}$$

(74)(75)から次式が得られる.

$$\Gamma\Delta = -n_Tp^2c_T^4\left(9p^4 + 2p^2 + 9\right)/\left(4c^6\right) \tag{77}$$

NLS 方程式の解は, $\Gamma\Delta$ の符号に強く影響される. 包絡ソリトンは $\Gamma\Delta > 0$ を満足するとき存在する. (77)で $n_T < 0$ であれば, すなわち層がせん断軟化材料で構成されているならば, すべての位相速度 $c > c_T$ に対して $\Gamma\Delta > 0$ である. $A = \varphi(\xi)e^{-i\Omega\tau}$ として(76)から導出される解は次式のように表される.

$$A(\xi,\tau) = \varphi_0\operatorname{sech}\left(\sqrt{\Delta/2\Gamma}\,\varphi_0\xi\right)e^{i\Delta\varphi_0^2\tau/2} \tag{78}$$

ここに,

$$\varphi_0 = \sqrt{-2\Omega/\Delta} \tag{79}$$

(78)は包絡線であり, 搬送波 $e^{i\phi}$ を乗じて(75)より有次次元化し(41)に代入すれば変位波形が得られる(**図 1**).

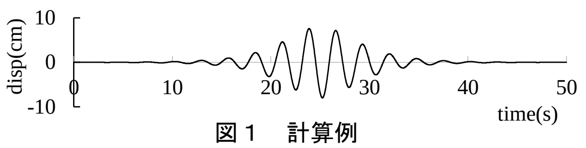

図１　計算例

日本海中部地震の際に観測された地震波の形状は, **図 1** によく似ていた. また, 観測点は, 硬い岩盤に軟弱な表層が堆積した地盤上にあり, 発生条件に適合していることから, 包絡ソリトンが発生していた可能性がある. 詳細については発表会場にて説明する.

参考文献

1) Dilek Demirkus and Mevlut Teymur : Shear horizontal waves in a nonlinear elastic layer overlying a rigid substratum , Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,Vol.46(5),pp.801-815,2017