

不連続面の摩擦構成則の積分手法を改良したマニフォールド法の開発

広島大学 非会員 ○末岡 知紘

広島大学 正会員 橋本 涼太

中電技術コンサルタント（株） 正会員 岩田 直樹

中電技術コンサルタント（株） 正会員 清田 亮二

中電技術コンサルタント（株） 正会員 高橋 裕徳

1. 研究の背景と目的

近年、不連続性岩盤や石造文化財など内部に不連続面を有する構造物の耐震性能評価のため、離散体の数値解析法による検討が進められており、その手法の一つにマニフォールド法 (NMM: Numerical Manifold Method)¹⁾がある。NMM は解析対象を有限要素法 (FEM: Finite Element Method) と同様に数学メッシュで離散化し、ペナルティ法で物体間の接触を考慮することで変形体同士の相互作用解析を行える。しかし、従来の NMM では接触中の物体間に生じているせん断力が摩擦強度 (Coulomb の摩擦則) を超過した際その場で不釣り合い力の再配分を行わず、次のステップで摩擦強度にまで引き戻すというアルゴリズムが採用されており、特に振動解析中の繰り返しせん断時には変位の誤差が蓄積する。そこで本研究では、NMM に摩擦構成則の陰的積分アルゴリズムであるリターン・マッピング法²⁾を新たに導入して解析精度の向上を図った。具体的には、各計算ステップで得られる不連続面のせん断変位から試行弾性せん断力を計算し、それが降伏基準を侵した場合にせん断力を摩擦強度に引き戻すリターン・マッピング処理を行う (図 1)。これにより摩擦強度を精緻に反映することができる。そして、開発した解析コードの性能効果を検討するため検証解析を実施した。

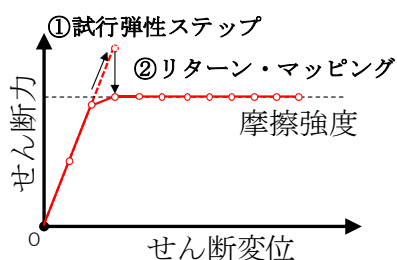


図 1 リターン・マッピング法の手順

2. マニフォールド法の支配方程式と弱形式

先述の通り、NMM では複数の連続体間の接触問題を扱う。 n 個の物体 Ω_i ($i=1, 2, \dots, n$) からなる系を考えると各物体 Ω_i の運動・変形は連続体の運動方程式、

$$\rho_i \ddot{\mathbf{u}}_i - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i - \rho_i \bar{\mathbf{b}}_i = 0 \quad (1)$$

ひずみの適合条件式、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{u}_i + (\nabla \mathbf{u}_i)^T \right\} \quad (2)$$

増分形の構成関係式、

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D}_i : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (3)$$

で表される。ここで、下付き添字 i は物体の物理量、変数の上のドット ($\cdot$) は物質時間微分、バー ($\bar{}$) は既知量を表す。また、 ρ は密度、 $\mathbf{u}$ は変位ベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力テンソル、 $\bar{\mathbf{b}}$ は既知の物体力ベクトル、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は微小ひずみテンソル、 $\mathbf{D}$ は 4 階の構成関係テンソルである。式 (2), (3)、変位・応力境界条件を考慮した連続体の境界値問題の弱形式を導出すると次式を得る。

$$\int_{\Omega_i} \delta \mathbf{u}_i \cdot \rho_i \ddot{\mathbf{u}}_i d\Omega + \int_{\Omega_i} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i : \boldsymbol{\sigma}_i d\Omega - \int_{\Omega_i} \delta \mathbf{u}_i \cdot \bar{\mathbf{b}}_i d\Omega - \int_{\Gamma_{io}} \delta \mathbf{u}_i \cdot \bar{\mathbf{t}}_i d\Gamma = 0 \quad (4)$$

次に、図 2 のように二つの連続体 Ω_j と Ω_k が境界で接触する場合を考える。このとき、各物体の運動・変形は式 (4) で表され、 Γ_{jk} 上では両者の法線方向の距離 (ギャップ) g_N が負でなく表面力が釣り合うという以下の条件式が満たされる必要がある。

$$g_N \geq 0 \quad \text{on } \Gamma_{jk} \quad (5)$$

$$\mathbf{t}_j + \mathbf{t}_k = 0 \quad \text{on } \Gamma_{jk} \quad (6)$$

ここで、 Γ_{jk} に作用している表面力、つまり接触力を Γ_{jk} に垂直な法線成分 t_N と平行なせん断成分 t_S に分解し、ギャップ g_N とせん断変位 g_S に対応する仮想変位をかけ、 Γ_{jk} に関して積分すると、接触力に関する仮想仕事は次式となる。

キーワード マニフォールド法, 摩擦構成則, 陰的積分

連絡先 〒739-8527 広島県東広島市鏡山一丁目 4 番 1 号 A2-521

T E L 080-6346-8584

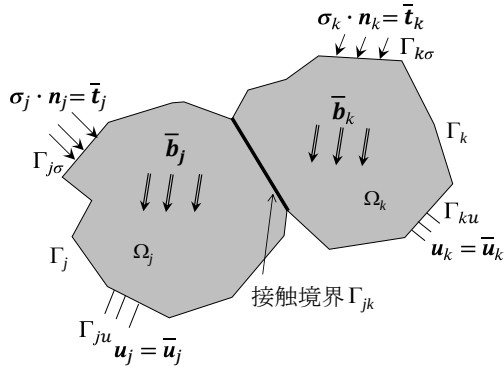


図2 連続体間の接触問題

$$\int_{\Gamma_{jk}} t_N \delta g_N d\Gamma + \int_{\Gamma_{jk}} t_S \delta g_S d\Gamma \quad (7)$$

物体同士で接触が発生している場合、物体 Ω_i に関する外力と内力による仮想仕事を $G_i^{\text{ext, int}}(\mathbf{u}_i, \delta \mathbf{u}_i)$ 、 Ω_j と Ω_k の間の接触力による仮想仕事を $G_{jk}^c(t_N, t_S, g_N, g_S)$ とすると、系全体に関して解くべき弱形式は次式となる。

$$\sum_{i=1}^n G_i^{\text{ext, int}}(\mathbf{u}_i, \delta \mathbf{u}_i) + G_{jk}^c(t_N, t_S, g_N, g_S) = 0 \quad (8)$$

3. 摩擦構成則の陰的積分の導入

式(8)に示した弱形式の接触に関する項には未知数として接触力 t_N と t_S がある。本研究では従来の NMM と同様に接触力をペナルティ法により正則化する。つまり、物体間の微小な重なりを許容し接触力の法線成分 t_N を、

$$t_N = p_N g_N \quad (9)$$

と表す。ここで、 p_N は法線ペナルティ係数、 g_N は貫入量（正ならばギャップ）である。

一方、せん断力 t_S は滑りの有無で非線形な挙動を示すため適切な積分アルゴリズムを導入する必要がある。本研究では摩擦降伏基準として Coulomb の摩擦則、

$$f = t_S \text{sgn}(g_S) - |t_N| \tan \phi \quad (10)$$

せん断変位 g_S の弾性成分 g_S^e と滑り変位 g_S^{slip} への滑り成分 g_S^{slip} への加算分解、

$$g_S = g_S^e + g_S^{\text{slip}} \quad (11)$$

せん断力に関する弾性構成関係、

$$t_S = p_S g_S^e \quad (12)$$

を仮定し、リターン・マッピング法を用いてせん断力を陰的に更新する。ここで、 ϕ は不連続面の摩擦角、 p_S はせん断方向のペナルティ係数である。

リターン・マッピング法では、時刻 t におけるせん断力 $t_{S|t}$ 、弾性せん断変位 $g_{S|t}^e$ が既知で、時刻 $t+\Delta t$ までにせん断変位 Δg_S が生じたときの摩擦構成則の初期値問題を後退 Euler 差分で離散化した次式、

$$g_{S|t+\Delta t}^e = g_{S|t}^e + \Delta g_S - \Delta \gamma \frac{\partial f}{\partial t_S} \quad (13)$$

を以下の拘束条件、

$$\begin{cases} f < 0 & (\text{弾性状態}), f = 0 & (\text{滑動状態}) \\ \Delta \gamma = 0 & (\text{弾性状態}), \Delta \gamma > 0 & (\text{滑動状態}) \\ f \Delta \gamma = 0 \end{cases} \quad (14)$$

の下で解く。得られた $\Delta \gamma$ を用いて時刻 $t+\Delta t$ における弾性せん断変位 $g_{S|t+\Delta t}^e$ を算定し、 $t_{S|t+\Delta t}$ を求めることで不連続面のせん断力を更新していく。この摩擦構成則の初期値問題の解は f と $\Delta \gamma$ によってせん断力が弾性範囲内（弾性状態）、せん断力が摩擦強度に達し滑りが生じる（滑動状態）、という二ケースが考えられる。まず、LOCK 状態（弾性状態）であると仮定すると、 $\Delta \gamma = 0$ なので弾性せん断変位は式(13)、せん断力は式(12)で更新される。ここで得られる弾性せん断変位、せん断力は仮の更新値でありそれぞれ試行弾性せん断変位 $g_{S|t+\Delta t}^{\text{trial}}$ 、試行弾性せん断力 $t_{S|t+\Delta t}^{\text{trial}}$ と呼び、

$$g_{S|t+\Delta t}^{\text{trial}} = g_{S|t}^e + \Delta g_S \quad (15)$$

$$t_{S|t+\Delta t}^{\text{trial}} = p_S g_{S|t+\Delta t}^{\text{trial}} \quad (16)$$

で記述される。このとき、 $t_{S|t+\Delta t}^{\text{trial}}$ を式(10)に代入して $f < 0$ であれば LOCK 状態と判定され、時刻 $t+\Delta t$ の真の解として次の計算ステップへ式(15)と式(16)が引き継がれる。

つづいて、試行弾性せん断力が摩擦強度を超過した場合、つまり $f \geq 0$ となった場合、CLOSE 状態（滑動状態）を仮定して解を求めるので、式(14)より $f=0$ かつ $\Delta \gamma > 0$ という拘束条件の下、せん断力 $t_{S|t+\Delta t}$ は Coulomb の摩擦則を用いると、

$$\begin{aligned} t_{S|t+\Delta t} &= \text{sgn}(g_{S|t+\Delta t}) |t_{N|t+\Delta t}| \tan \phi \\ &= p_N \text{sgn}(g_{S|t+\Delta t}) |g_{N|t+\Delta t}| \tan \phi \end{aligned} \quad (17)$$

となる。そして、せん断力を式(17)の値まで引き戻すことで摩擦強度を精緻に反映できる。なお、式(8)は接触による境界非線形性と摩擦構成則を含む非線形性方程式であるため、せん断力の引き戻しの際に外力の不釣り合い力が発生するため、Newton-Raphson 法を用いた反復解法により系全体の平衡状態を求解する。このとき反復計算の過程での解の二次収束性を確保するため、Newton-Raphson 法に整合するように方程式を線形化し、接線剛性マトリックスを導出した。また、その線形化方程式には加速度項が含まれているため、従来の NMM と同様 Newmark 法の β 法（ $\beta=0.5$, $\gamma=1$ ）を用いて時間離散化し、時間刻みごとに解くことで挙動を解析する。

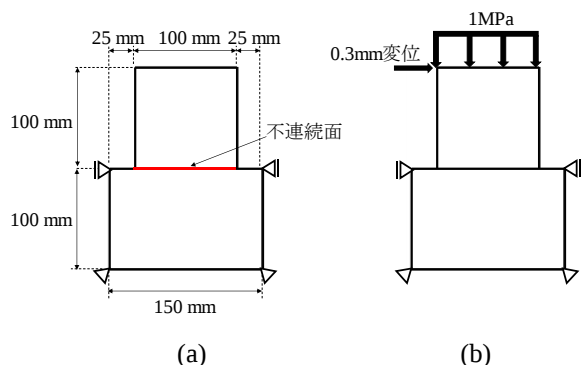


図3 一面せん断解析モデル：(a)寸法，(b)载荷条件

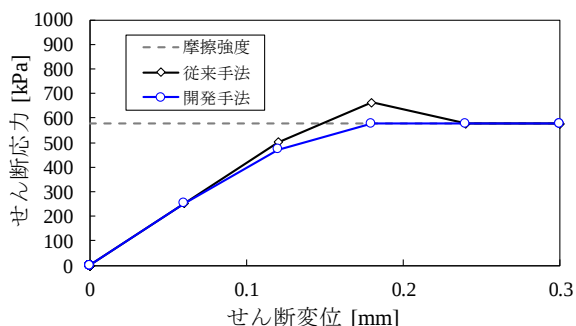


図4 せん断応力—せん断変位関係

4. 一面せん断解析

開発手法の性能を検証するため、一面せん断試験の解析を実施した。解析には図3に示した二つの不連続な物体（弾性体、ヤング率：1GPa，ポアソン比：0.0）からなるモデルを使用した。そして、上段のブロック上面に下向きに1MPaの垂直荷重を载荷した上で1ステップあたりのせん断変位増分を0.06mmとして右へ0.3mmのせん断変位を与え、一面せん断試験を模擬する。なお、不連続面のペナルティ係数は100GN/mとし、摩擦角は30°とする。得られたせん断応力とせん断変位の関係を図4に示す。図4中には摩擦強度の正解値（ $1\text{MPa} \times \tan 30^\circ \approx 577.3\text{kPa}$ ）を合わせて表示した。従来手法ではせん断応力が摩擦強度を超過しているが、開発手法では強度を正確に表現できており、リターン・マッピング法による精度改善が確認できた。

5. 不連続性岩盤斜面模型振動台実験の再現解析

開発手法の動的問題への適用性を検証するため既往の不連続ブロックの振動台実験³⁾の再現解析を行った。同実験は琉球石灰岩（単位体積重量：22kN/m³，ヤング率：7GPa，ポアソン比：0.33）の不連続性岩盤模型を振動台で加振し、不連続面上の動的な滑り挙動を検討したものである。ここでは実験模型と同寸法の解析モデル（図5）に実験と同じ加速度（図6中の黒線）を与える解析を従来手法と開発手法で行い、生じた滑り変位量

を実験値と比較した。斜面モデルは上下二つの石材からなり不連続面の摩擦角は足立ら³⁾の実験結果に基づき40.5°とし、垂直ペナルティ係数とせん断ペナルティ係数をそれぞれ10GN/m，10MN/mとした。また、時刻みは0.001秒とした。

解析結果より、上段ブロックの滑り変位履歴を図6に示す（加速度、変位ともに右向きが正）。従来手法では実験結果より約2秒早く滑りだしているが、開発手法では滑り出し時間が実験値とほぼ一致しており、動的問題での解析性能の改善を検証できた。

6. 結論

本研究では、マニフォールド法に摩擦則の陰的積分を導入することで不連続面の摩擦挙動の解析精度改善を図り、基本的な境界値問題の解析により開発手法の妥当性を検証できた。

参考文献

- 1) Shi, G.H.: Manifold method of material analysis, Trans. 9th Army Conf. on Applied Mathematics and Computing, Report No. 92-1, U.S. Army Research Office, 1991.
- 2) Wriggers, P.: Computational Contact Mechanics, Springer, 2006.
- 3) 足立光，岩田直樹，清田亮二，藍檀オメル，渡嘉敷直彦：不連続面を有する岩盤斜面の地震時安定性に関する実験的および解析的検討，第14回岩の力学国内シンポジウム講演集，講演番号054，2017.

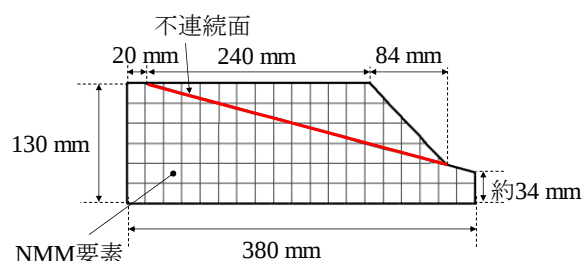


図5 岩盤斜面モデル

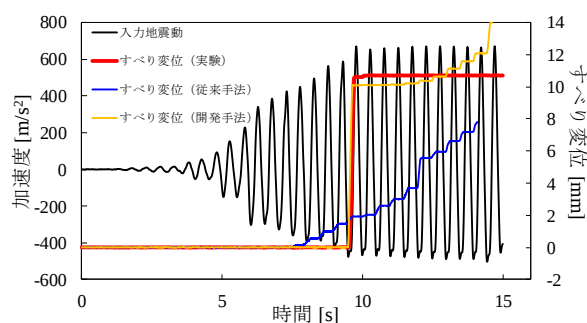


図6 上段ブロックのすべり変位