マイクロトラスによる構造最適化問題

広島大学大学院　学生会員　○ 横谷 祐樹
広島大学大学院　正会員　有尾 一郎

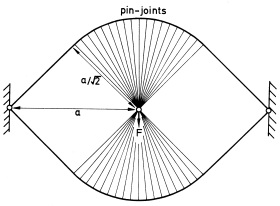
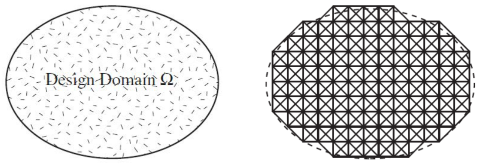


Fig. 1 Michell の最適構造概念 (1904)



(a) 連続体　(b) マイクロトラス

Fig. 2 連続体の離散化

1. はじめに

構造物の形態は，その構造物の目的や用途などに応じて既設の標準的な構造物の形状をもとに，その設計条件を満足するように材料や寸法などが人為的に修正され，最終的な形状・断面等の構造形態が決められる．しかしながら，構造物が大型化すると,「無駄な贅肉 (材料) を切り落とし，必要な筋肉を必要な部分に配置する」といった軽量かつ丈夫な構造形態そのものを設計する必要性に迫られる．このような構造最適化問題のベンチモデルとして「コート掛け問題」が知られている．この問題の解として，Michell による理想形態 (1904 年)[1]がある．しかし，この解では各部材の必要な要素剛性割合や応力状態が明らかになっていない．また，数値計算時には解のメッシュ依存性やチェッカーボード現象の課題も存在する．本研究では，コート掛け問題や単純梁モデルに対して，設計領域をマイクロトラスで離散化し最適形態形成を行い，最小重量となるような最適な骨格構造と応力状態を明らかにすることを目的とする．

2. Michell の構造最適化

本研究はマイクロトラスの配置によって，**Fig.1** に示すような Michell[1]の概念による最適構造形態を反復法によって再現を試みる．ただし，この構造系は最適であるがトラスとしては不安定構造としてよく知られている．しかし，基本的骨組み構造と考えれば圧縮部材と引張部材だけから成り立ち，荷重とつりあう構造系となる．

(1) マイクロトラスによる最適構造形態

Fig.2(a) に示すような連続体の設計領域 Ω を，M 個のトラスからなる有限の設計変数

$$\boldsymbol{x} = \left(\cdots, x^{(m)}, \cdots\right)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^M \quad \text{in} \quad \Omega \tag{1}$$

で満たされるものと近似する．すなわち，設計領域は

$$\Omega = \int \mathrm{d}\Omega$$
$$\approx \lim_{\mathrm{d}\Omega \to 0} \sum_{m}^{(1/\mathrm{d}\Omega)\in \mathbf{Z}} \mathrm{d}\Omega^{(m)} = \sum_{m\gg 1}^{M} \mathrm{d}\Omega^{(m)} \propto \sum_{m\gg 1}^{M} x^{(m)} \tag{2}$$

と **Fig.2**(b) のように有限のマイクロトラス $\mathrm{d}\Omega$ で敷き詰められるものとする．離散数 M が大きくなれば，この均質な設計領域 Ω は無数の格子トラスで敷き詰められることとなる．均等な格子トラスを用いることで離散化によるモデルの生成および形態創生が容易であり，複雑な設計領域や設計条件にも柔軟に対応できるといった利点がある．

3. 形態形成の理論 [2]

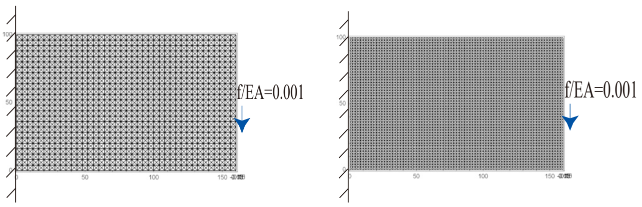
まず初期条件として設計領域と初期剛性 $\boldsymbol{x}_{(0)}$ を設定し，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, f, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = K(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} - f\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

と線形釣合方程式を定める．ここに $\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル，f は荷重パラメータ，$\boldsymbol{p}$ は荷重ベクトルである．一般に線形有限要素法では部材剛性 $\boldsymbol{x}$ と荷重 $f\boldsymbol{p}$ が与えられ，そのときの変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を求めることになる．

本研究では，剛性行列の修正は各部材の応力と平均の応力の比によって行い，釣合式の条件を満たすように剛性を変化させる．荷重制御や変位制御によって釣合点 $(\boldsymbol{u}_{(\nu)}, p, \boldsymbol{x}_{(\nu)})$

キーワード　有限要素法，マイクロトラス，最適形態形成，最適骨格
連絡先　〒 739-8527 東広島市鏡山 1-4-1 広島大学大学院工学研究科社会基盤環境工学専攻 TEL082-424-7792



(a) 25 × 40 メッシュ分割　(b) 50 × 80 メッシュ分割

Fig. 3 片持ち梁のマイクロトラス 100×160 の解析モデル

が得られたとしたら，このときの部材応力は，

$$\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)} = \mathcal{W}\left(\boldsymbol{u}_{(\nu)}\right) \tag{4}$$

と，各部材の変位の関数とする．ここに，ν はフィードバック回数，$\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)} = (\cdots, \sigma^{(m)}_{(\nu)}, \cdots)^{\mathrm{T}}$ を表すこととする．さらに，部材応力と平均応力 $\overline{\sigma}_{(\nu)}$ の比によって，

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_{(\nu)}) = \gamma \frac{|\sigma^{(m)}_{(\nu)}|^2}{\overline{\sigma}^2_{(\nu)}} \boldsymbol{x}_{(\nu)} = \boldsymbol{x}_{(\nu+1)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{5}$$

$$\overline{\sigma}_{(\nu)} = \frac{1}{M}\sqrt{\sum_{m=1}^{M} \sigma^{(m)}_{(\nu)}}, \quad m = 1, 2, \cdots, M \quad \cdot \tag{6}$$

と修正剛性行列も更新される．ここで，γ はどれだけ次の剛性へと反映させるかを示す還元率を表し，解の収束率を調整する．したがって，部材剛性は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{(\nu+1)} &= \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)}, \boldsymbol{x}_{(\nu)}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\cdots \mathcal{F}(\boldsymbol{x}_{(0)}))) \\ &= \mathcal{F}^{(\nu)}(\boldsymbol{x}_{(0)}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{7}$$

のように反復される．

本研究における最適化問題は，最小重量設計を目的にしており，以下のように条件を設定した．

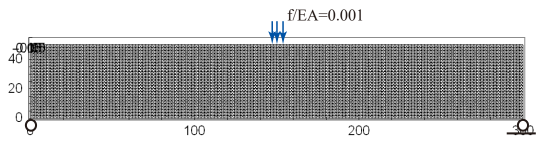
$$\begin{aligned} &\text{Minimize} : \sum_{m=1}^{M} \boldsymbol{W}^{(m)} = \sum_{m=1}^{M} \rho \boldsymbol{A}^{(m)}_{(\nu)} \ell^{(m)} \\ &\text{subject to} : \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, f, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \\ &\boldsymbol{A}^{(m)}_{(\nu)} \leq A_{max}, \quad \sigma^{(m)}_{(\nu)} \leq \sigma_a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{8}$$

ここに，$\boldsymbol{W}^{(m)}$ は各部材の重量，ρ は密度，$\ell^{(m)}$ は部材長，A_{max} は最大断面積，σ_a は許容応力をそれぞれ表す．密度と部材長は一定であるため，各部材の断面積 $\boldsymbol{A}^{(m)}_{(\nu)}$ を変化させることによって，より最適な形態を形成できる．

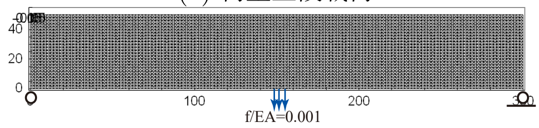
4. 数値解析結果

(1) コート掛け問題の形態最適化

片持ち支持条件下の設計領域 (100 × 160 サイズ) の離散系モデルを考える．荷重は梁先端の中央に鉛直下向きに与える．メッシュ分割数による最適な構造形態の違いを調べるために，メッシュ分割数を 25 × 40 と 50 × 80 の 2 パターンに対してモデル化を行った．得られたそれぞれの形態について考察すると，**Fig.3**(a) ではメッシュ分割に依存した形態になっているのに対し，**Fig.3**(b) では滑らかな形態が得られた．また，**Fig.3**(a) の最適形態の部材数は初期の部材数に比べ 25.9%まで除去されたのに対して，**Fig.3**(b) では 24.7%まで除去されている．したがってこれらの結果から，メッシュ分割数を増やすことで，形態は滑らかになり，より多く部材を除去できると言える．



(a) 荷重上段載荷



(b) 荷重下段載荷

Fig. 4 単純梁のマイクロトラス 50×300 の解析モデル

(2) 単純梁モデルの形態最適化

一端ピン固定，他端ローラーの単純支持条件下の設計領域 (50 × 300 サイズ，25 × 150 メッシュ分割) の離散系モデルを考える．荷重は鉛直下向きで，載荷位置は **Fig.4**(a) と **Fig.4**(b) に示すように梁中央の上段と下段の 2 パターンでモデル化を行い，荷重載荷位置による最適な構造形態の違いを調べた．得られたそれぞれの形態を考察すると，荷重載荷位置によってトラスの三角形の位相は異なったが，チェッカーボード現象は現れず，どちらもワーレントラスのような形態になった．また，最終的な部材数はそれぞれ初期の部材数の 23.2%，25.0%となっており，約 3/4 を除去できた．

5. 結　語

本研究では，マイクロトラスによるプログラムを構築し，コート掛け問題や単純梁モデルを例に構造最適化問題に取り組んだ．設計領域内にマイクロトラスを配置した上で荷重条件と境界条件を与えて，重量最小となる骨格構造のレイアウトを得たことが本研究の最大の成果である．以下に明らかになった点を示す．

- 片持ち支持条件のコート掛け問題のモデルに対し，メッシュ分割数を増やすことでより滑らかな形状が得られた．また，部材数もより多く除去できることが分かった．
- 単純梁モデルに対し，チェッカーボード現象を回避でき，荷重載荷位置によってトラスの配置や位相が異なるものの，どちらもワーレントラスのような形態となった．

参考文献

1) A. G. M. Michell : The limits of economy of material in framed structures, Phil. Mag. (Series 6), 8, 589-597, 1904.
2) I. Ario, M. Nakazawa, Y. Tanaka, I. Tanikura, S. Ono : Development of a prototype deployable bridge based on origami skill, Automation in Construction, Vol.32, 104-111, 2013.