

1. はじめに

エネルギー平衡方程式法は多方向不規則波の浅水変形と屈折変形を解くことができる。しかし、位相情報を持たないため、反射と回折を考慮できない。

間瀬ら¹⁾は、放物型波動方程式を基に定式化を行い、回折項を陽な形でエネルギー平衡方程式に導入した。このモデルには、プログラム化が容易、収束計算を必要としないため必ず解が得られる、などの利点があるが、回折を拡散として扱っていることから適用範囲が限定される欠点もあると思われる。

本研究では、間瀬らとは異なるアプローチからエネルギー平衡方程式に回折項を導入した。はじめに定式化について述べ、つぎに開口防波堤背後の波浪変形計算を行い、提案モデルの妥当性を検証する。

2. 回折項の定式化

回折項の定式化は緩勾配方程式に基づく。緩勾配方程式は次式で表される。

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \zeta) + k^2 CC_g \zeta = 0 \quad (1)$$

水面変動を $\zeta = a \exp(i\phi)$ とおいて(1)に代入し、実部と虚部に分ける。実部と虚部はそれぞれつぎのように表される。

$$\text{実部} \quad \nabla \cdot (CC_g \nabla a) + CC_g a (k^2 - \nabla \phi \cdot \nabla \phi) = 0 \quad (2)$$

$$\text{虚部} \quad \nabla \cdot (CC_g a \nabla \phi) + CC_g \nabla a \cdot \nabla \phi = 0 \quad (3)$$

虚部(3)はつぎのようにまとめられる。

$$\nabla \cdot (CC_g a^2 \nabla \phi) = 0 \quad (4)$$

位相勾配 $\nabla \phi$ をつぎのように表す。

$$\nabla \phi = (l \cos \theta, l \sin \theta) \quad (5)$$

(5)を(4)に代入すると次式になる。

$$\nabla \cdot (l \vec{C}_g a^2) = 0 \quad (6)$$

$$\text{ここに、} \vec{C}_g = (C_g \cos \theta, C_g \sin \theta) \quad (7)$$

(6)はエネルギー平衡方程式である。

実部(2)に(5)を代入して l について整理するとつぎのようになる。

$$l^2 = k^2 + \frac{\nabla \cdot (CC_g \nabla a)}{CC_g a} \quad (8)$$

(8)の右辺第2項は回折に関する項で、回折を無視することができるのなら右辺第2項はゼロになる。

(8)の右辺第2項の分子を展開する。

$$l^2 = k^2 + \frac{\nabla(CC_g) \cdot \nabla a}{CC_g a} + \frac{\nabla^2 a}{a} \quad (9)$$

ここで、 $\nabla a^2 = 2a \nabla a$ であるから、 $\nabla a = \nabla a^2 / (2a)$ になり、また、この式と $\nabla^2 a^2 = 2a \nabla^2 a + 2 \nabla a \cdot \nabla a$ より(10)が得られる。なお、以下では簡略化のため $\nabla a \cdot \nabla a = (\nabla a)^2$ のように表す。

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2 a}{a} &= \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 a^2}{a^2} - \left(\frac{\nabla a}{a} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 a^2}{a^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\nabla a^2}{a^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

$\nabla a = \nabla a^2 / (2a)$ と(10)を(9)に代入すると次式になる。

$$l^2 = k^2 + \frac{1}{2} \frac{\nabla(CC_g) \cdot \nabla a^2}{CC_g a^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\nabla^2 a^2}{a^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla a^2}{a^2} \right)^2 \right\} \quad (11)$$

波のエネルギーは振幅の2乗に比例するため(11)の a^2 を波のスペクトル S で置換する。

$$l^2 = k^2 + \frac{1}{2} \frac{\nabla(CC_g) \cdot \nabla S}{CC_g S} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\nabla^2 S}{S} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla S}{S} \right)^2 \right\} \quad (12)$$

ここで、 l は波のエネルギーの非一様性に起因する見かけの波数であり、 $l = \alpha k$ とおく。 α は下式のよう表される。

$$\alpha = \left[1 + \frac{1}{2k^2} \left\{ \frac{\nabla(CC_g) \cdot \nabla S}{CC_g S} + \frac{\nabla^2 S}{S} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla S}{S} \right)^2 \right\} \right]^{0.5} \quad (13)$$

(13)を成分表示すると次式になる。

$$\alpha = \left[1 + \frac{1}{2k^2} \left[\frac{(CC_g)_x S_x + (CC_g)_y S_y}{CC_g S} + \frac{S_{xx} + S_{yy}}{S} - \frac{S_x^2 + S_y^2}{2S^2} \right] \right]^{0.5} \quad (14)$$

つぎに、(6)についても(13)と同様に a^2 を波のスペクトル S で置換する。そして、 $l = \alpha k$ と $\omega = Ck$ の関係を用いて整理すると次式が得られる。

$$\omega \nabla \cdot (\alpha \vec{C}_g S) = 0 \quad (15)$$

(15)に(7)を代入して展開するとつぎようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(\alpha SC_g \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha SC_g \sin \theta) \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \alpha SC_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = 0$ として、さらに展開する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(SC_g \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial y}(SC_g \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ SC_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta \right) \right\} \\ & + \frac{SC_g}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \sin \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

偏微分のシュワルツの定理より次式が成立つ。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (18)$$

(18)に(5)を代入すると次式になる。

$$\frac{\partial(l \sin \theta)}{\partial x} - \frac{\partial(l \cos \theta)}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

(19)に $l = \alpha k$ を代入し展開する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta + \frac{1}{k} \left(\frac{\partial k}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial k}{\partial y} \cos \theta \right) \\ & + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cos \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 $k = \omega/C$ を x と y でそれぞれ微分する。

$$\frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{k}{C} \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{k}{C} \frac{\partial C}{\partial y} \quad (21)$$

(21)を(20)に代入する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta = \frac{1}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial C}{\partial y} \cos \theta \right) \\ & - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (22)$$

(22)を(17)に代入しまとめると、回折項が付加されたエネルギー平衡方程式がつぎのように得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x}(Sv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Sv_y) + \frac{\partial}{\partial \theta}(Sv_\theta) + \frac{SC_g}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \sin \theta \right) = 0 \quad (23)$$

ここに、

$$\begin{cases} v_x = C_g \cos \theta \\ v_y = C_g \sin \theta \\ v_\theta = \frac{C_g}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial C}{\partial y} \cos \theta \right) - \frac{C_g}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cos \theta \right) \end{cases} \quad (24)$$

回折に寄与する項は、(23)の第4項と(24)における v_θ の第2項である。回折効果を表すパラメータ α は収束計算を行い算出する。

3. 検証解析

提案法を用いて開口防波堤背後の波高比を計算し Sommerfeld 解と比較した。多方向不規則波の周波数スペクトルは Bretschneider・光易型スペクトル、方向関数は光易型を用いた。 $S_{\max}$ は 10 と 25 とし、無次元開口幅（開口幅/波長）は $B/L=2.0$ とした。

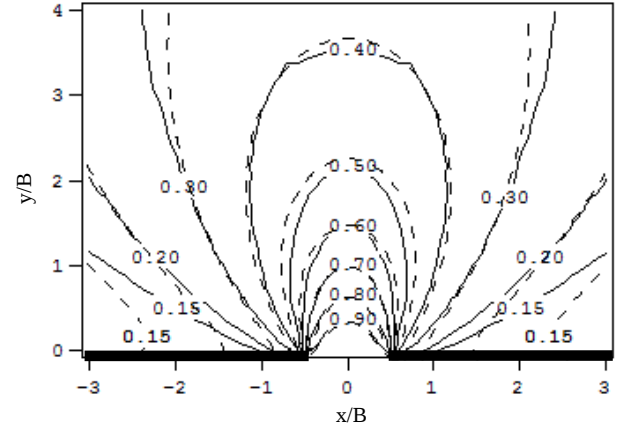


図1 波高比分布($S_{\max}=10$)

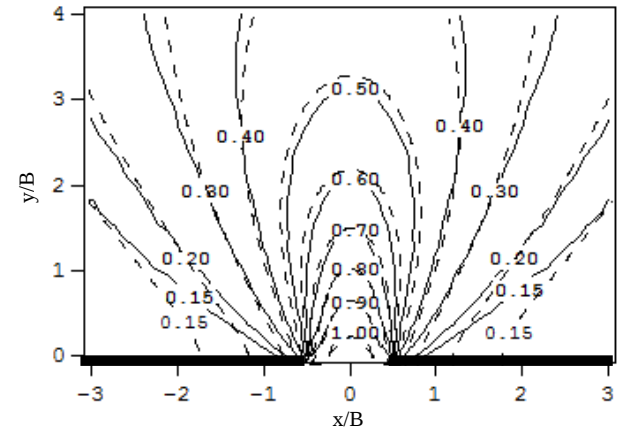


図2 波高比分布($S_{\max}=25$)

図1、図2において、 $-0.5 < x/B < 0.5$ は開口部を、破線は Sommerfeld 解を、実線は解析結果を示している。これらの図から明らかなように、解析結果と Sommerfeld 解はよく一致している。

4. まとめ

エネルギー平衡方程式に回折項を取り入れる方法を提案した。開口防波堤背後の波高比を計算し提案法の妥当性を検証した。

参考文献

1) 間瀬肇, 高山知司他: 波の回折を考慮した多方向不規則波の変形計算モデルに関する研究, 土木学会論文集 No.628/II -48, pp.177-187, 1999.8