

球体の平面衝突における時間変化する接触力の簡易算定式の提案

鳥取大学 学生会員 ○中村 雅志
鳥取大学 正会員 谷口 朋代
鳥取大学 正会員 小野 祐輔

1. はじめに

外力が作用した時の地盤の挙動の解析では、一般に個別要素法や有限要素法が用いられている。これらの方法では地盤を土粒子よりも大きな小要素に分割して解析を行う。一方、既往の研究¹に、地盤を土粒子ごとに分割し、土粒子単体の挙動を厳密に取り扱うことで、外力に対する地盤の応答を考えるという研究がある。しかし、この研究では土粒子同士の衝突を考慮できていない。衝突直前の速度及び物性値から衝突直後の速度を算出できると、既往の研究がより厳密なものになると考えている。

そこで本稿では、各物体の材質と入射速度、反発係数、摩擦係数などの物理量から、衝突による物体間の接触力積を求める簡易算定式を提案する。ここで、接触力ではなく接触力積を求める理由は、接触時間で割ることで接触力を求め、時刻歴応答解析で使用するためである。なお、以下では、添え字として接線方向を x 、法線方向を y 、入射時を i 、反射時を r とする。

2. 法線方向の接触力及び接触力積の算定方法

法線方向の接触力積は次式で表される。

$$\int_0^{\Delta t_1} N(t) dt = mv_{yi}(1 + e) \quad (2.1)$$

ここで、 $N(t)$ は時間 t における法線方向の力、 m は衝突物体の質量、 e は反発係数、 v は速度、 Δt は衝突により接触した時間である。

$N(t)$ は、Hertz の衝突理論²を用いると、次式で与えられる

$$N(t) = nN(\alpha(t))^{1.5} \quad (2.2)$$

ここで、 $\alpha(t)$ は時間 t における球体の変形距離、 n は衝突物体及び被衝突物体の物性値によって定まる定数である。ここで、Hertz の衝突理論は完全弾性衝突を考えているが、実現象では非弾性衝突になることがほとんどである。そこで、(2.2)式に反発係数の概念を導入し、非弾性衝突の条件でも用いられるようにする。その際、

計算を簡単にするため、衝突物体の塑性の影響のみで反発係数が生じると考え、図1に示すように塑性が発生するときに変形距離が一定になるということを仮定する。

3. 接線方向の接触力及び接触力積の算定方法

接線方向の接触力は、滑動の有無で場合分けを行う。

滑動が有る場合、接線方向の接触力は動摩擦力である。動摩擦係数を μ' とおくと、接線方向の接触力 $F(t)$ は、法線方向の接触力 $N(t)$ を用いて次式で定義される。

$$F(t) = \mu' N(t) \quad (3.1)$$

一方、滑動が無い場合、接線方向に発生する加速度と角加速度には衝突物体の半径 r を用いて、 $\ddot{x}(t) = r\ddot{\theta}(t)$ の関係式が成り立つ。この式に接線方向及び回転方向の運動方程式を代入し、整理すると、接線方向の接触力 $F(t)$ が次式で表現されることになる。

$$F(t) = \frac{mgI \sin \phi + m\lambda r N(t)}{mr^2 + I} \quad (3.2)$$

ここで、 ϕ は入射角、 I は慣性モーメント、 λ は転がり摩擦係数である。

接触中に滑動が停止しない場合、接触力積は(2.1)式及び(3.1)式を用いて

$$\int_0^{\Delta t} F(t) dt = \mu' mv_{yi}(1 + e) \quad (3.3)$$

となる。接触中に滑動が停止する場合、接触開始から滑動停止までの時間を Δt_1 、滑動停止から接触が終了するまでの時間を Δt_2 、接触が開始した時の滑動による速度を v_{si} とすると、滑動が停止するまでの接触力積は、

$$\int_0^{\Delta t_1} F(t) dt = \frac{2m(v_{si} + g\Delta t_1 \sin \phi)}{(7 - 5\frac{\lambda}{\mu r})} \quad (3.4)$$

となる。(3.3)式、(3.4)式で求められる接触力積を比較することで接触終了時の滑動の有無を判定することができる。(3.3)式が小さい場合、接触中に滑動は停止しないため、接線方向の接触力積は(3.3)式の値になる。(3.4)式が小さい場合、接触中に滑動は停止するため、

キーワード 衝突、接触力、時間変化

連絡先 〒680-8552 鳥取市湖山町南4丁目101 鳥取大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻土木工学講座

T E L 0857-31-5286

接線方向の接触力積は(3.4)式に滑動が無い場合の接線方向接触力(3.2)式を Δt_2 で積分することで求まる。なお、 Δt_1 は接触力の関数を微分して滑動停止に必要な接触力積と等しい値をとる時間を算出することで算出し、 Δt_2 は $\Delta t - \Delta t_1$ より算出した。なお、この計算過程で

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2.5}}}$ 及び $\int (\sin(x))^{1.5}$ の式が表れる。これらの不定積分

は解析的に求めることができないため、それぞれ $\frac{2.94}{\pi} \sin^{-1}(x)$ 及び $1 - \cos(x)$ と近似した。

4. 実験結果と解析結果の比較と考察

導出した簡易算定式を評価するため、メノウ製の球を、花崗岩で作成した平板に衝突させる実験³及び、時刻歴応答解析と比較した。図2及び図3のグラフは高さ30cmからメノウ製の球を自由落下させた時の接触終了時の速度である。

接触終了時の接線速度は実験結果、時刻歴応答解析結果、簡易算定式の値すべてがほぼ一致したが、角速度は実験結果が時刻歴応答解析結果、算定式の値と大きく異なった。実験で算出された角速度は入射角が低角度の時に、入射時とは逆方向に滑動が発生していたと考えられる値であった。しかし、実際に逆方向に滑動が発生することは考えにくい。従って、実験の角速度は値が正しくないということが考察される。この原因としては、完全な球体ではないこと、実験の計測時に角速度は変化が小さい為計測に誤差が出た、等が考えられる。

5. 接触力積の近似解の提案

接触終了時に滑動が無い場合の接触力積は(3.4)式に滑動停止後の接触力積を加えることで算出される。ここで、滑動停止後に作用する接触力積は滑動が停止するまでに作用する接触力積より十分小さいことや、接触時間や転がり摩擦係数が他の物理諸量と比べて十分に小さいことから、これらの値は無視できると考えることができる。よって、接触終了時に滑動が無い場合の接触力積を次式で近似する。

$$\int_0^{\Delta t_1} F(t)dt = \frac{2mv_{si}}{7} \quad (5.1)$$

図3の●は接触終了時に滑動が無い場合の接触力積を(5.1)式で近似した場合を表している。(5.1)式の近似式は時刻歴応答解析の結果とほぼ合致している。よって、接触終了時に滑動が無い場合の接触力積は(5.1)式に近似できる。

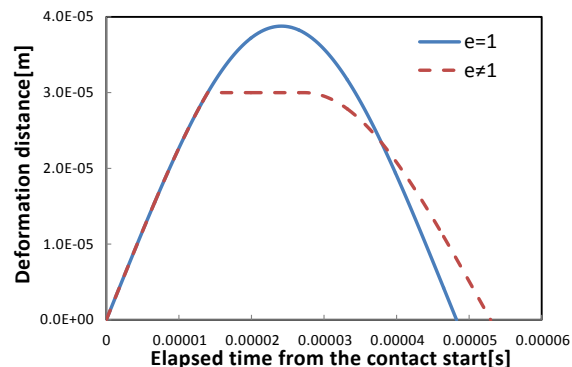


図1 衝突によって生じる球体の変形距離の変化

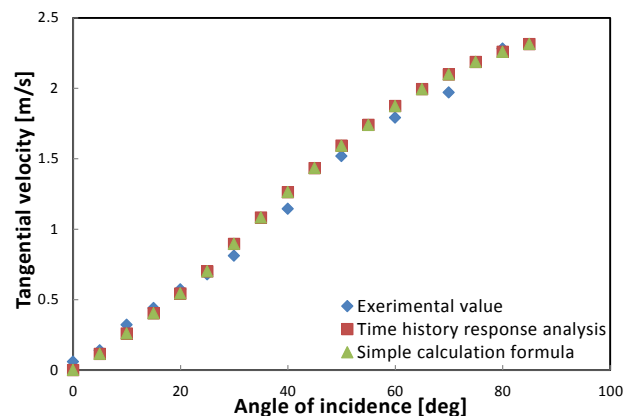


図2 接触終了時の接線速度

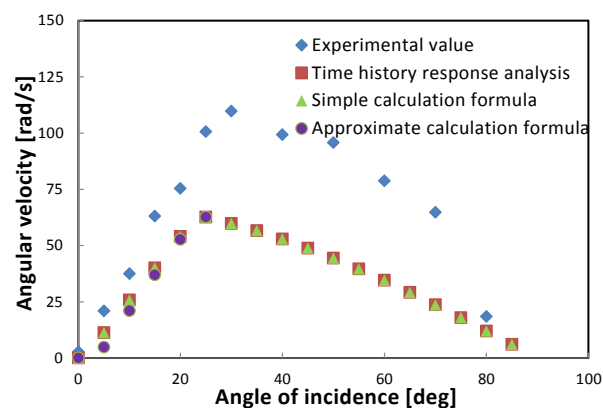


図3 接触終了時の角速度

参考文献

- 1) 藤田嘉貴・谷口朋代・小野祐輔：円弧上を動く剛円盤の回転及び滑動に関する実験的検討、土木学会中国支部第67回研究発表会、pp13-14
- 2) 金田潔：弾性論、コロナ社、1973
- 3) 河野勝宣・北迫勝也・池添保雄・西村強：室内模型実験に基づく落石の斜面衝突時の速度変化に関する研究、土木学会論文集（地圏工学）、vol. 71, No. 2, pp81-91

謝辞

本論文の遂行にあたり、鳥取大学大学院工学研究科河野勝宣助教の実験データ及び助言を頂いた。ここに謝意を表します。