円弧上を動く剛円盤の回転及び滑動に関する実験的検討

鳥取大学大学院　学生会員　○藤田嘉貴
鳥取大学大学院　正会員　谷口朋代
鳥取大学大学院　正会員　小野祐輔

1. はじめに

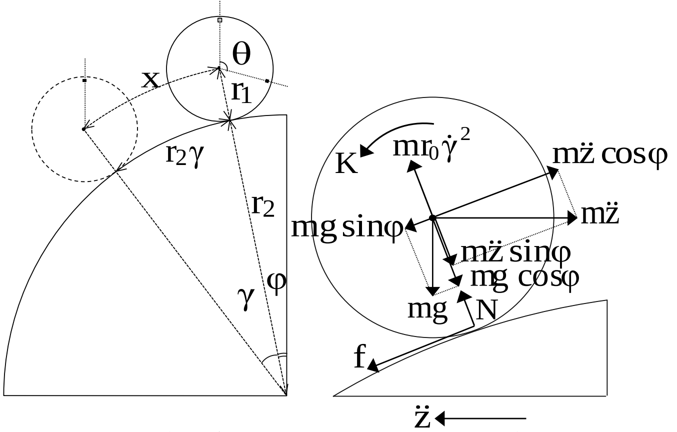
地盤を土粒子の集合体として捉えると，外力に対する地盤の応答は粒子の滑りや回転等の運動の結果であると考えることができる．そこで，円状の粒子を想定して2次元平面内での運動が詳細に解析できれば，その集合体として地盤の応答が表現できるのではないかと考えた.

本研究は，その足掛かりとして，1つの剛な円状の粒子が水平地動を受けて円弧面に沿って運動する様子について解明を試みた．検討は運動方程式を導き数値解を求め，実験結果と比較することで行った.

2. 水平地動加速度を受ける円柱の運動方程式の導出

(1) 純粋な回転の運動方程式

静止状態から水平地動加速度 $\ddot{z}$ を受けて，円盤が純粋な回転運動のみで円弧面上を運動する場合を考える.



a) 運動の拘束条件　　b) 力の釣り合い

図-1　水平地動を受け円弧上を動く円盤

円弧面に沿って座標軸 x を設定すれば，円弧面上を運動する円盤が満たすべき拘束条件は(1), (2)式となる.

$$\ddot{x} = (r_1 + r_2)\ddot{\gamma} \tag{1}$$

$$r_1\ddot{\theta} = r_2\ddot{\gamma} \tag{2}$$

ここで，$\ddot{\theta}$ は円盤の回転加速度，$\ddot{\gamma}$ は円弧中心と円盤中心を結ぶ線を動径とみなした場合の，動径の角加速度である.

転がり抵抗の無い斜面上の円盤の運動[1]を参考に，円盤の円弧上の接線方向と法線方向の運動方程式は，(3)式と(4)式，回転方向の運動方程式は(5)式となる.

$$m\ddot{x} = mg\sin\varphi - m\ddot{z}\cos\varphi - f \tag{3}$$

$$mr_0\dot{\gamma}^2 + N - m\ddot{z}\sin\varphi - mg\cos\varphi = 0 \tag{4}$$

$$I\ddot{\theta} = r_1 f - K\,\mathrm{sign}(\dot{\theta}) \tag{5}$$

ここで，m:円盤の質量，$\ddot{z}$:水平地動，r_1:円盤の半径，r_2:円弧の半径，I:円盤の慣性モーメント，g:重量加速度，K:転がり摩擦モーメント，f:摩擦力．$I = mr_1^2/2$，$K = \lambda mg$，$r_0 = r_1 + r_2$ である.水平加振の方向は図-1 b)に示す $\ddot{z}$ 軸の方向を正とする.

(1)~(5)式より,単位質量当たりの運動方程式を得る.

$$\ddot{x} = \frac{2r_0}{2r_0 + r_2}D \tag{6}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2r_2}{r_1(2r_0 + r_2)}D \tag{7}$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{2}{2r_0 + r_2}D \tag{8}$$

$$\left(\because D = g\sin\varphi - \ddot{z}\cos\varphi - \frac{\lambda}{r_1}\left(\ddot{z}\sin\varphi + g\cos\varphi - r_0\dot{\varphi}^2\right)\mathrm{sign}(\dot{\theta})\right)$$

(2) 滑動を伴う回転の運動方程式

f が最大静止摩擦力を上回ると円盤は滑動し，動摩擦力 f' が作用する．接線方向，法線方向と円盤の回転方向の運動方程式は，それぞれ(9), (10), (11)式となる.

$$m\ddot{x} = mg\sin\varphi - m\ddot{z}\cos\varphi - f' \tag{9}$$

$$mr_0\dot{\gamma}^2 + N - m\ddot{z}\sin\varphi - mg\cos\varphi = 0 \tag{10}$$

$$I\ddot{\theta} = r_1 f' - K\,\mathrm{sign}(\dot{\theta}) \tag{11}$$

(1)式と(9), (10), (11)式より次式を得る．また，滑動速度は(15)式で定義される.

$$\ddot{x} = g\sin\varphi - \ddot{z}\cos\varphi - \mu' E\,\mathrm{sign}(\dot{s}) \tag{12}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{r_1^2}\left\{r_1\mu'\,\mathrm{sign}(\dot{s}) - \lambda\,\mathrm{sign}(\dot{\theta})\right\}E \tag{13}$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{1}{r_0}\left\{g\sin\varphi - \ddot{z}\cos\varphi - \mu' E\,\mathrm{sign}(\dot{s})\right\} \tag{14}$$

$$\left(\because E = \ddot{z}\sin\varphi + g\cos\varphi - r_0\dot{\varphi}^2\right)$$

$$\dot{s} = r_2\dot{\gamma} - r_1\dot{\theta} \tag{15}$$

キーワード: 運動方程式，滑動，回転　連絡先 TEL: 090-2375-6742　E-mail: M14T6012B@cv.tottori-u.ac.jp

3. 実験結果と解析値の比較

振動台に固定した円弧上に円盤を設置して加振する実験を行い，円盤の接線方向変位，回転変位の実験値と解析値を時刻歴で比較した結果を図-3, 4 に示す．

鋼製の円盤の半径は 0.025m, 質量は 472g であり，加振周波数 2Hz, 最大振幅 0.8G を有する正弦波を水平方向に入力した．図-2 に入力した水平加速度の時刻歴を示す．摩擦係数を計測する実験を別途行い，円盤と円弧の最大静止摩擦係数 0.18 と，動摩擦係数 0.13 を得た．

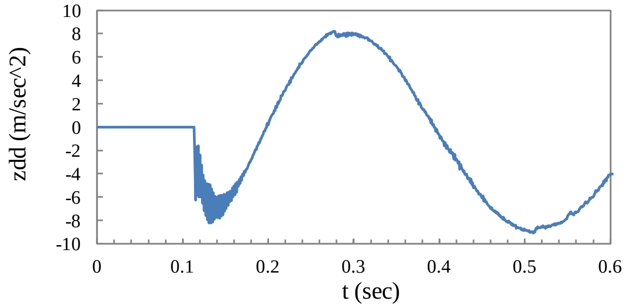


図-2 入力水平加速度

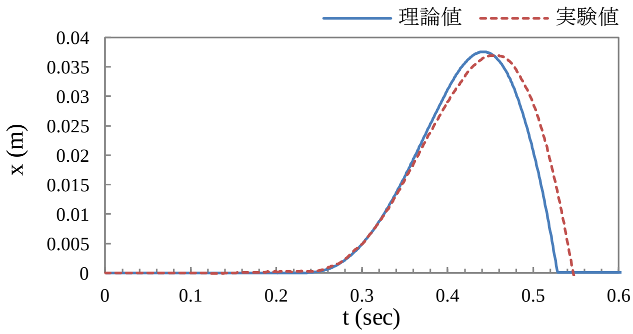


図-3 接線方向変位

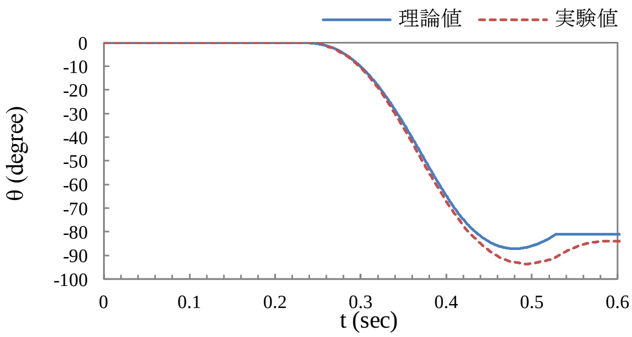


図-4 回転変位

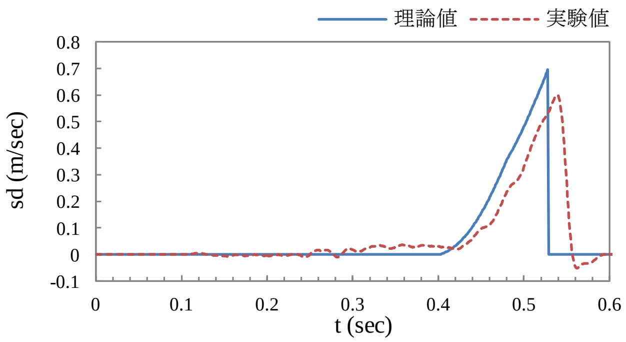


図-5 滑動速度

(1) 運動の状態

図-2 において，時刻 t=0s のとき円盤は図-1 a)において円弧上の点線で示す位置にあり,ストッパーによって円弧面上を転がり落ちないよう設置されている．

図-2 において，t=0.1s のとき水平加振が始まり t=0.1~0.2s の間，円盤には図-1 b)に示す慣性力とは逆向きの慣性力が作用するが，ストッパーで止められているので円盤は運動しない．一方，t=0.2s のとき入力水平加速度の方向が変わり t=0.24s のとき，円盤は円弧上方に向かって純粋な回転運動を始める．t=0.4s のとき，慣性力の方向が反転するため円盤は円弧上方に向かいながらも減速し，t=0.45s より円弧下方に転がり始める．t=0.42s のとき，摩擦力が最大静止摩擦力を上回り円盤は回転しながら滑動し始め，回転しながら滑動する状態は t=0.45s でストッパーに接触するまで続く．

(2) 考察

図-3, 4 より，t=0.1~0.2s の間は純粋な回転運動であり，本研究で示した運動方程式によって精度良く解析できていることが分る.その理由は，回転のみの運動であれば，(2)式が示すように，接線方向加速度 $\ddot{x}$ と回転加速度 $\ddot{\theta}$ は関連性を持ち，転がり摩擦係数が無視できるとすれば，その運動は水平加速度の値のみで決定されるからである.一方，t=0.4s 以降は，回転しながら滑動する運動であり，解析精度が若干悪くなっていることが分る．その理由は，滑動が始まると(2)式が成り立たなくなり，$\ddot{x}$ と $\ddot{\theta}$ は関連性がなくなる．また滑動中の運動方程式である(12), (13)式には動摩擦係数 μ' が含まれ，場所により変化することが容易に考えられる.しかし，解析では一定の動摩擦係数を用いているため，滑動を伴う円盤の運動を精度良く表現し切れなかったと考えられる．

8. 結論

図-5 より，運動状態の切り替わりを表現できたと言える．図-3, 図-4 の変位は実験値と理論値で運動の外形が概ね一致しており，導出した運動方程式は妥当であると考えられる．

6. 参考文献

1) 阿部龍蔵，兵藤申一: 物理学概論上巻, p86-87, 1983.