

鳥取大学大学院 学生会員 ○藤田嘉貴

鳥取大学大学院 正会員 谷口朋代

鳥取大学大学院 正会員 小野祐輔

1. はじめに

地盤は土粒子の集合体であり、外力に対する地盤の応答は土粒子どうしの滑りや転がり等の運動の結果であると考えることができる。そこで、土粒子単体の挙動を解明することにより、動的な荷重に対する地盤内の土の応答を詳細に把握することができるのではないかと考えた。

本研究は、その足掛かりとして剛な円状の土粒子を想定し、1つの円状の土粒子が水平地動を受けて水平面上を運動する様子について解明を試みた。検討は運動方程式を導き数値解析を求めて、実験結果と比較することで行った。尚、実験には円柱を用いた。

3. 水平地動加速度を受ける円柱の運動方程式の導出

(1) 純粋な回転の運動方程式

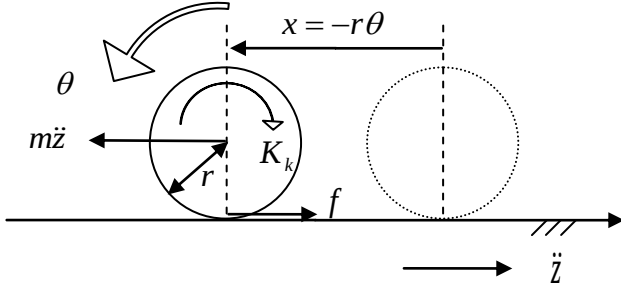


図-1 純粋な回転の運動

図-1 に示す静止状態から水平地動加速度 $\ddot{z}$ を受けて円柱が回転をしている時の運動方程式を求める。円柱の質量を m 、円柱の半径を r 、円柱の慣性モーメントを I 、重力加速度を g とし、円柱には慣性力 $m\ddot{z}$ 、静止摩擦力 f 、転がり摩擦モーメント K_k が働く。円柱は運動しているものの、回転のみの運動であり滑動による変位はない。よって f は静止摩擦力となる。また、純粋な回転の運動なので、回転した角度 θ と x の間には次式で表される関係が成立する。

$$\ddot{x} = -r\ddot{\theta} \quad (1)$$

これらのことより、並進方向(右方向を正)と回転方

向(反時計回りを正)の運動方程式は以下のように求められる。

$$m\ddot{x} = -m\ddot{z} + f \quad (\text{並進方向}) \quad (2)$$

$$I\ddot{\theta} = fr - K_k \text{sign}(\dot{\theta}) \quad (\text{回転方向}) \quad (3)$$

このとき $I = \frac{mr^2}{2}$ 、 $K_k = \lambda_k mg$ である。

式(1) (2) (3) より、並進方向の加速度として(4)式、回転方向の加速度として(5)、回転運動中に剛円柱に作用する静止摩擦力として(6)を得る。

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} \left(-\ddot{z} + \frac{\lambda_k g \cdot \text{sign}(\dot{\theta})}{r} \right) \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{3r} \left(-\ddot{z} + \frac{\lambda_k g \cdot \text{sign}(\dot{\theta})}{r} \right) \quad (5)$$

$$f = \frac{m}{3} \left(\ddot{z} + \frac{2\lambda_k g \cdot \text{sign}(\dot{\theta})}{r} \right) \quad (6)$$

(2) 回転しながら滑動する運動方程式

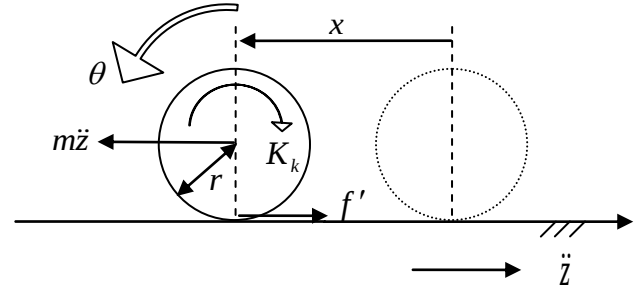


図2 回転しながら滑動する運動

回転のみの運動から、水平地動加速度 $\ddot{z}$ がさらに大きくなり、 $m\ddot{z}$ が最大静止摩擦力を上回ることによって、滑動すると考えられる。並進方向(右方向を正)と回転方向(反時計回りを正)の運動方程式は以下のように求められる。

$$m\ddot{x} = -m\ddot{z} + f' \cdot \text{sign}(r\dot{\theta} + \dot{x}) \quad (\text{並進方向}) \quad (7)$$

$$I\ddot{\theta} = rf' \text{sign}(r\dot{\theta} + \dot{x}) - K_k \cdot \text{sign}(\dot{\theta}) \quad (\text{回転方向}) \quad (8)$$

(7) (8) 式より、滑動中の並進方向加速度として(9)式、回転方向加速度(10)式を得る。

$$\ddot{x} = -\ddot{z} + \mu' g \cdot \text{sign}(r\dot{\theta} + \dot{x}) \quad (9)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{r} \left(\mu' g \cdot \text{sign}(r\dot{\theta} + \dot{x}) - \frac{\lambda_k g \cdot \text{sign}(\dot{\theta})}{r} \right) \quad (10)$$

4. 各運動条件の開始、停止条件の導出

(1) 回転開始条件

回転は滑動より先に開始する。これは、最大転がり静止摩擦モーメント $K_s = \lambda_s mg$ が最大静止摩擦力 $f = \mu mg$ よりはるかに小さいからである。静止状態から水平地動加速度 $\ddot{z}$ を受けて円柱が回転を開始する条件を求める。円柱の回転開始条件は円柱を回転させようとするモーメント rf と、回転を妨げようとする転がり摩擦モーメント K_k 釣り合いから (11) 式となる。

$$|rf| > |K_s| \quad (11)$$

このとき $f \neq \mu mg$ であるので、(6) 式を代入し回転開始条件として (12) 式を得る。

$$|\ddot{z}| > \left| \frac{\lambda_s g}{r} \right| \quad (12)$$

(2) 回転中の円柱の滑動開始条件

円柱は、静止状態から水平地動加速度 $\ddot{z}$ を与えると、図 1 の様に回転する。さらに水平地動 $\ddot{z}$ が大きくなること (6) 式より、静止摩擦力 f はに大きくなる。 f が最大静止摩擦力 μmg に達すると滑動を始める。このことから、回転しながら滑動を開始する条件は次式で与えられる。

$$|f| > |\mu mg| \quad (13)$$

回転中の静止摩擦力 f は (6) 式で与えられるので、これを (13) に代入すると、円柱が回転しながら滑動を開始する条件として (14) 式が求まる。

$$\left| \frac{m}{3} \left(\ddot{z} + \frac{2\lambda_k g \cdot \text{sign}(\dot{\theta})}{r} \right) \right| > |\mu mg|$$

$$|\ddot{z}| > \left| 3\mu g - 2 \frac{\lambda_k g \cdot \text{sign}(\dot{\theta})}{r} \right| \quad (14)$$

(3) 滑動継続条件

純粋な回転運動をするときには $\dot{x} = -r\dot{\theta}$ が成立している。この条件が成立しないときは滑動が生じている状態にあると言えることから、滑動継続条件式は次式となる。

$$|\dot{\theta}r + \dot{x}| > 0 \quad (15)$$

(4) 滑動停止条件

(14) (15) 式を同時に満たさないとき、滑動が停止したと言えるので滑動停止条件は (4-6) (4-7) の 2 式で表すことができる。

$$|\ddot{z}| < \left| 3\mu g - 2 \frac{\lambda_k g \cdot \text{sign}(\dot{\theta})}{r} \right| \quad (16)$$

$$|\dot{\theta}r + \dot{x}| = 0 \quad (17)$$

5. 静止摩擦係数と転がり摩擦係数の測定

数値解析に用いる摩擦係数は実験によって求めるが、最大静止摩擦係数 μ と動摩擦係数 μ' は極めて近い値であるので、本論文は摩擦係数 μ' と最大静止摩擦係数 μ は等しいものとする。また転がり摩擦係数も同じことが言えるので、使用する最大転がり静止摩擦係数 λ_s は転がり動摩擦係数 λ_k と等しいものとして使用することにする。

(1) 静止摩擦係数の計測方法

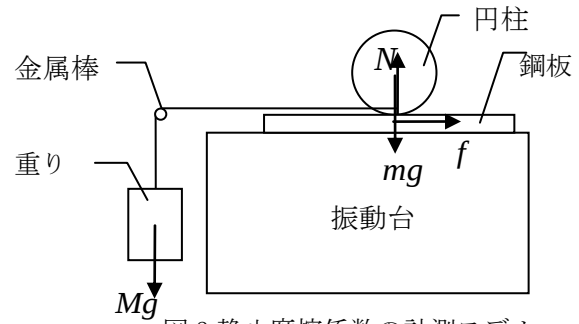


図 3 静止摩擦係数の計測モデル

- ① 円柱の側面下部に接着剤で糸をつける。
- ② 鋼板の上に滑車の役割を果たす金属棒を設置し金属棒に糸をかける。
- ③ 糸の先に容器を取り付け、それに水を入れていく。
- ④ 円柱が滑った時のおもり（ペットボトル+水）の重さ M 、円柱の重さ m を量り、 μ を計算する。

①～④を 20 回繰り返して計測値の平均を求めた結果、静止摩擦係数 $\mu = 0.23$ となった。

(2) 転がり動摩擦係数 λ_k の計測方法

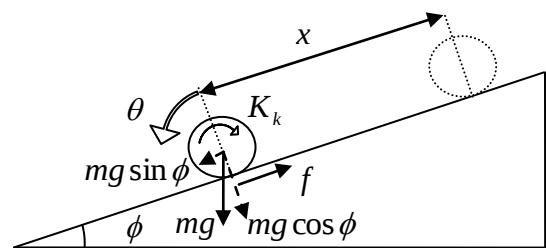


図 4 転がり動摩擦係数の計測モデル

- ① 水平面に対して角度が ϕ 傾いている斜面上に円柱を設置する。
- ② ①の位置にある円柱から手を離して円柱を転がす。
- ③ 円柱が止まっている位置から、距離 x 離れた位置まで転がって移動するのにかかる時間を t として、時間を計測する。

床の傾く角度 ϕ と転がる距離 x を変えながら、16回計測(18)式より λ_k を計算し λ_k の平均を求めた結果 $\lambda_k = 1.36 \times 10^{-4}$ となった。

$$\lambda_k = r \left(\sin \phi - \frac{3x}{gt^2} \right) \quad (18)$$

6. 水平地動を受ける円柱の実験結果および解析値と実験値の比較

運動方程式の妥当性を検討する。実験では、円柱の重心の水平変位、回転変位を計測した。使用する振動台の水平地動 $\ddot{z}$ は、振動台で計測した値を使用した。

鋼製の円柱の半径は0.05m、質量は12505gであり、水平加速度として4Hz、0.4Gの正弦波を用いる。 G は重力加速度であり $G = 9.8(m/s^2)$ である。

(1) 運動の各イベントの説明

実験より得られた各データは実際の現象としてどのような運動状態にあり、運動状態はどのような条件で変化するかを検証する。

運動状態を区間(a)(b)(c)(d)の4区間に区切り、各運動条件が変わる境界をイベントABCDとする。

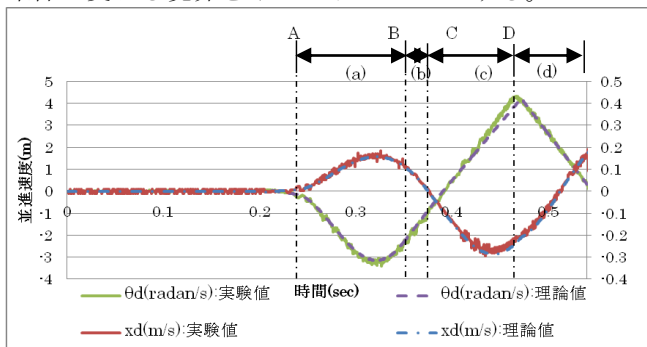


図5(i) 水平面上を運動する円柱の挙動

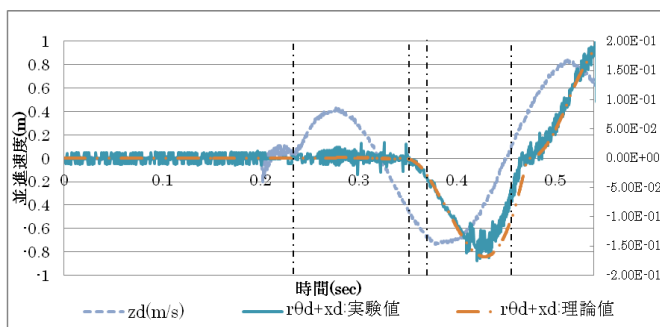


図5(ii) 水平面上を運動する円柱の挙動

θd は円柱の角速度、 xd は並進速度、 zd は振動台の並進速度である。

・区間(a) イベント A は水平地動加速度が(12)式の値以上になり回転が開始する点で、回転のみの運動となる。

・区間(b) イベント B は滑動が開始する点である。区間(a)で減少に転じた水平地動加速度は0をまたいで方向が変わり、負の方向に増加してゆく。水平地動加速度が(14)式の値に達し、滑動が始まる。

・区間(c) イベント C は $xd = 0$ であるにもかかわらず、 θd が0以外の値をもつ点である。このとき円柱は振動台のある位置に留まりながら回転をしている。

振動台の並進速度の方向が左方向(正)から右方向(負)に反転する。円柱はイベント C 以前(区間(b))の振動台の左方向の変位により、鋼板と円柱の接触点で摩擦力 f を受ける。このとき xd は右方向(正)で θd は時計回り(負) $r\theta d + xd$ は負の値である。 $r\theta d > xd$ で回転による並進速度が実際の並進速度 xd より大きい。このことから、このときの摩擦力 f は回転を止めようとする方向、右方向に生じており回転速度は減速する。

・区間(d) イベント D は円柱に働く摩擦力 f の作用方向が変わる点である。 zd は正の方向で振動台は右方向に動いている。区間(c)で摩擦力 f は右方向に生じている。この現象を振動台の外から見ると、円柱は振動台と共に右方向に移動しようとして振動台に置き去りにされている状態である。つまり円柱は摩擦力 f によって右方向に加速させられている。

(2) 実験値と理論値の変位の比較

理論値は2つ存在する。実験で得られた静止摩擦係数 μ を用いて計算したグラフと、理論値が最も実験値に近づいたときの静止摩擦係数 μ_2 を用いて計算したときのグラフである。

$$A=0.4G \quad \mu = 0.23 \quad \mu_2 = 0.15$$

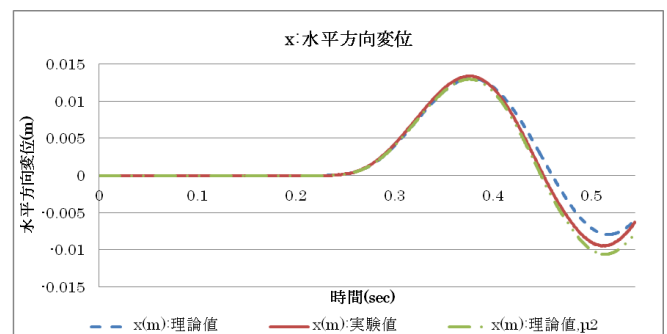


図6 x:水平方向変位

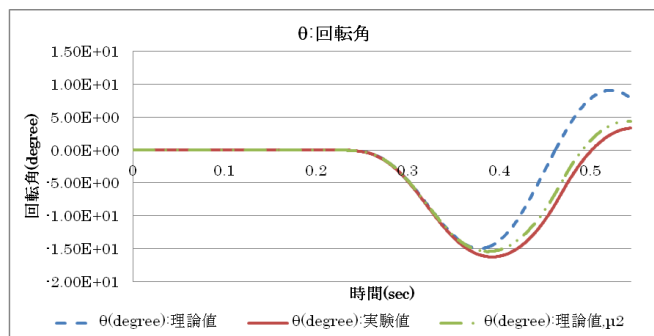


図 7 θ :回転方向変位

(i) 円柱の水平方向変位について(図 6)

図より、実験値と解析値について比較してみると図の概形はほぼ一致している部分も見られるが、 $t=0.4(\text{sec})$ を超えたあたりから、時刻が経過するにつれて実験値と理論値に差が生じ始めている。導出した円柱の振動台に対する相対加速度の運動方程式に問題がある場合は円柱が滑動を開始したときの運動方程式である可能性がある。しかし摩擦係数を $\mu 2$ に変更すると 0.5 秒後も実験値と理論値は近づくものの、実験値を下回ってしまうことから、実際の摩擦係数は $\mu 2$ よりも大きくなる可能性がある。

(ii) 回転方向変位について(図 7)

水平方向変位と同じであり、 $t=0.35(\text{sec})$ を超えたあたりから、時刻が経過するにつれて実験値と理論値に差が生じ始めている。この時刻は滑動が始まる時刻と一致する。滑動が生じている状態の運動方程式が現象を表現し切れていないと言え、方程式が不完全な可能性がある。しかし、静止摩擦係数を $\mu 2$ 変更した場合どのグラフも実験値の値に近づいていくことから、実験で求めた摩擦係数 μ が真値から大きく離れていることも考えられる。 $\mu = 0.23$ から $\mu 2 = 0.15 \sim 0.08$ 摩擦係数を小さくすると理論値は実験値に近くなっている。実際の動摩擦係数が $\mu 2$ と一致すれば、運動方程式は妥当と考えることができる。

7. 考察

回転のみの運動であれば、 $\mathbf{x} = -\mathbf{r}\boldsymbol{\theta}$ が成り立ち水平方向加速度 $\ddot{\mathbf{x}}$ と回転加速度 $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ は関連性を持ち、転がり摩擦係数がほぼ 0 として無視すれば、水平地動加速度 $\ddot{\mathbf{z}}$ の値のみで決定されると言える。しかし、滑動が始ま

ると $\mathbf{x} = -\mathbf{r}\boldsymbol{\theta}$ が成り立たなくなり $\ddot{\mathbf{x}}$ と $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ は関連性がなくなる。また滑動中の $\ddot{\mathbf{x}}$ と $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ の式(3-9)、(3-10)には動摩擦係数 μ' が入っている。動摩擦係数は温度、場所により変化し一定ではなく、滑動を伴う運動は回転のみの運動に比べて不安定な運動であると言える。よって運動方程式で滑動を伴う運動を表現し切れなかったのだと考えられる。

8. 結論と今後の課題

実験により測定した摩擦係数の信頼性が低いため、導出した運動方程式の妥当性を評価することは難しい。

図 5-(ii)を見ると $\mathbf{r}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{x}$ が滑動開始後 0 になることがないので、滑動が停止していないことが分る。このため滑動停止条件の妥当性を検討することができていない。滑動が再び停止するような実験を行い解析する必要がある。

9. 参考文献

- 1) 佐々木惇朗：水平地動を受ける剛菜円柱の回転と活動挙動の定式化と実験による検証，鳥取大学工学部，卒業論文，2012
- 2) 飯田貴希：円弧上を動く剛円盤の挙動に関する研究，鳥取大学工学部，卒業論文，2013