

# 多孔質体における移流拡散場の均質化有限要素解析

岡山大学大学院 学生会員 ○大野 宏和  
 岡山大学大学院 非会員 平嶋 心  
 岡山大学大学院 正会員 市川 康明  
 岡山大学大学院 正会員 木本 和志

## 1. はじめに

多孔質体中の熱移動現象は、様々な分野で研究されており、地下水学においても飽和・不飽和多孔質体中の熱移動に関する研究が進められてきた。地温・地下水温の分布や変化は、地下水流動調査の重要な手段として利用されており、例えば、透水性の高い地層と低い地層が互層をなしている堆積層中では、地下水は透水性の高い地層を選択的に流れ、地温が地下水流動状況を反映していることがあり、それを利用して地下水流動特性を調べることもある。

本研究は、多孔質体における熱伝導現象のメカニズムを把握するための数値解析手法の開発を行ったものである。

飽和多孔質体中の熱移動ルートとして、図1に示すように熱伝導による土粒子の接触面における熱移動、熱伝導による液相中の熱の流れと液相自体の移流、固相と液相の接触を通して行われる熱交換が考えられる。さらに不飽和多孔質体においてはこれに加えて気相も含まれるため、その現象は一層複雑になる。このようなことから、信頼性のある熱伝導シミュレーションのためにはミクロスケールにおける土粒子表面を通しての固相・液相・気相間の熱交換まで考慮する必要がある。そこで、本研究ではミクロ非均質材料とその全体の挙動を統一的に記述できる数学的手法の一つである均質化法を導入し、多孔質体における熱伝導解析プログラムの作成を行うこととした。

はじめに、非定常熱伝導問題の定式化を示し、次に均質化法を用いたミクロ方程式及びマクロ方程式の導出について説明する。最後に、ミクロ問題の数値解析例を通して、固相・液相・気相の三相から成るモデルにより特性関数ならびに均質化係数の算出例を示し、本手法により、土粒子や間隙水の存在を考慮した地盤材料などへの温度解析への適用性があることを示す。

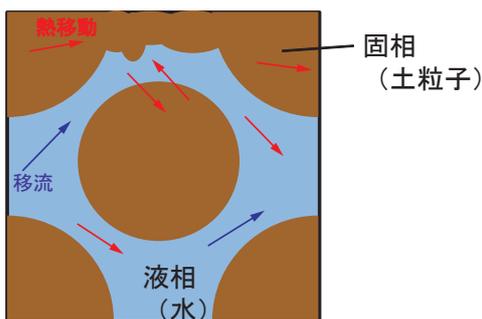


図-1 飽和多孔質体における熱伝導現象

## 2. 熱伝導方程式

熱伝導方程式は、熱量保存の法則と Fick の法則から導かれる。温度  $T$ 、密度  $\rho$ 、比熱  $c$ 、移流速度  $v_i$ 、熱伝導率  $\lambda_{ij}$ 、吸熱・発熱項  $r$  とすると、熱伝導の支配方程式が次のように表せる。

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = r \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

この方程式に初期値及び境界条件を与えることで、温度場を求めることができる。

## 3. 均質化法

均質化法とは、図2のような非均質材料が周期的な微視構造（ユニットセル）を持つ場合、微視構造の形状や材料特性が分かれば、その微視的な特性を反映させた巨視的な挙動が得られる手法である。均質化法を適用することにより、ミクロレベルの支配方程式である微視方程式、及び微視的挙動を反映させた全体の支配方程式である巨視方程式が求められる。微視方程式では微細構造ユニットセル内での挙動を示す特性関数  $\chi_i$  を得ることができ、巨視方程式では特性関数によって表される均質化された物性値（均質化係数）を用いることで、マクロレベルでの挙動を、境界条件を与えることで求めることができる<sup>1)</sup>。

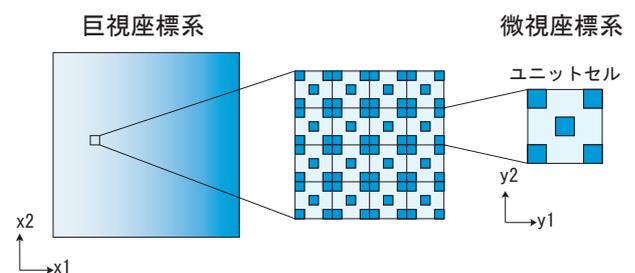


図-2 均質化解析で用いる座標系

## 4. 均質化法の熱伝導方程式への導入

式(1)で示した熱伝導方程式の初期値-境界値問題を考える。対象とする領域は  $\Omega$  で、その境界は  $\partial\Omega$  と表す。初期条件は、

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \quad (2)$$

で、境界の  $\partial\Omega$  のうち  $\partial\Omega_u$  では Dirichlet 条件

$$T(\mathbf{x}, t) = T_u(t) \quad \text{on } \partial\Omega_u \quad (3)$$

が,  $\partial\Omega_q$  は Neumann 条件

$$-n_i \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} = q \quad \text{on } \partial\Omega_q \quad (4)$$

が満足されるものとする.

ユニットセル内の局所座標を  $y$ , 大域座標を  $x$  で表し, 両者の間にはパラメータ  $\varepsilon$  を介して

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (5)$$

の関係があるものとして,  $T(\mathbf{x})$  を次のように摂動展開する. 図3は摂動展開のイメージを示したものである.

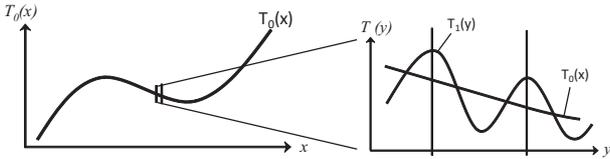


図-3 摂動展開の第1項, 第2項のイメージ

$$T_\varepsilon(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k T_k(x, y, t) \quad (6)$$

ここにミクروسケール座標  $y$  はスケールパラメータ  $\varepsilon$  を用いて

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (7)$$

と表される. 式(7)から

$$\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \quad (8)$$

より式(6)を式(1)に代入し,  $\varepsilon$  の級数として整理し, 各項の係数をゼロとおく. その結果得られる式を,  $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^0$  の場合について書き下すと以下のようになる.

- $\varepsilon^{-2}$  の項:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \lambda_{ij} \frac{T_0}{\partial y_j} \right) = 0 \quad (9)$$

- $\varepsilon^{-1}$  の項:

$$\rho c v_j \frac{\partial T_0}{\partial y_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij} \frac{\partial T_0}{\partial y_j} \right) + \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \lambda_{ij} \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_j} + \frac{\partial T_1}{\partial y_j} \right) \right\} = 0 \quad (10)$$

- $\varepsilon^0$  の項:

$$\begin{aligned} & \rho c \frac{\partial T_0}{\partial t} + \rho c v_j \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_j} + \frac{\partial T_1}{\partial y_j} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda_{ij} \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_j} + \frac{\partial T_1}{\partial y_j} \right) \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \lambda_{ij} \left( \frac{\partial T_1}{\partial x_j} + \frac{\partial T_2}{\partial y_j} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

従って, 式(9)より

$$T_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = T_0(\mathbf{x}, t) \quad (12)$$

が言え, この結果を踏まえれば式(10)より

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \lambda_{ij} \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_j} + \frac{\partial T_1}{\partial y_j} \right) \right\} = 0 \quad (13)$$

となることが分かる. ここで, 次の関係を満たす特性関数  $\chi_k$  を導入する.

$$T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = -\chi_k(\mathbf{y}) \frac{\partial T_0(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} + C(\mathbf{x}) \quad (14)$$

これを, 上の式に代入すれば, 特性関数は

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ \lambda_{ij} \left( \delta_{kj} - \frac{\partial \chi_k}{\partial y_j} \right) \right] = 0 \quad (15)$$

を満たす必要があることが分かる. これを, 微視方程式と呼ぶ. 最後に, 式(11)の各項を, ユニットセル上で

$$\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{|Y|} \int_Y (\cdot) dv \quad (16)$$

の式に従い平均化すれば, 左辺第4項はゼロとなる. 残る左辺第1から3項に, 特性関数を使った  $T_1$  の表現を代入して整理すると, 最終的には以下の式が得られる.

$$\langle \rho c \rangle \frac{\partial T_0}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial T_0}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \langle \lambda_{ij} \rangle \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right) - \langle r \rangle = 0 \quad (17)$$

ここに,  $\langle \rho c \rangle, \langle v_j \rangle, \langle \lambda_{ij} \rangle, \langle r \rangle$  は, 以下の式で定義される均質化係数である.

$$\langle \rho c \rangle \equiv \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho c dy \quad (18)$$

$$\langle \lambda_{ij} \rangle \equiv \frac{1}{|Y|} \int_Y \lambda_{ik} \left( \delta_{kj} - \frac{\partial \chi_j}{\partial y_k} \right) dy \quad (19)$$

$$\langle v_j \rangle \equiv \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho c v_k \left( \delta_{kj} - \frac{\partial \chi_j}{\partial y_k} \right) dy \quad (20)$$

$$\langle r \rangle \equiv \frac{1}{|Y|} \int_Y r dy \quad (21)$$

## 5. 数値計算手法<sup>2)</sup>

Galerkin 法に基づく有限要素法を熱伝導方程式に対して適用すると Peclet 数が大きい場合には, 数値的な不安定性を引き起こし, 正しい計算結果が得られない. Galerkin 法による離散化は有限差分法の中心差分による離散化と等しくなるため, 移流が卓越すると数値振動が発生するからである. この問題を解決するために有限要素法では流れの方向に応じて重みを変化させることにより人工的な熱伝導率を加えて安定を図る Upwind-Galerkin 法, 流れの流線方向のみに適切な人口熱伝導率を加える StreamlineUpwind/Petrov-Galerkin 法に基づく安定化有限要素法が提案されており, 本研究では後者を採用し解析を行った.

## 6. 数値解析例

多孔質体における熱伝導現象のメカニズムを把握するためにはミクロスケールにおける土粒子表面を通しての固相・液相・気相間の熱交換まで考慮する必要があり、均質解析では、間隙比や飽和度等のパラメータを、直接微視構造の幾何形状モデルとして表現する。本研究では以下に示すようなユニットセルを仮定し計算を行った。

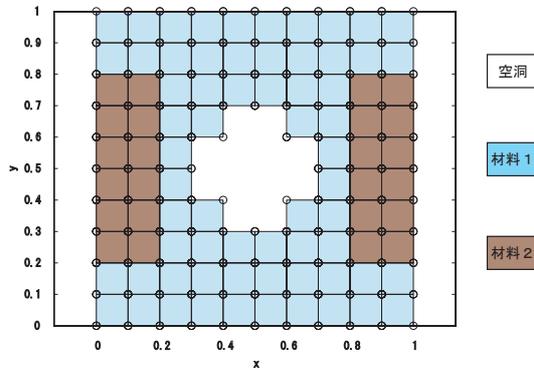


図-4 ユニットセルモデル A

材料1は液体を想定し移流及び熱伝導を，材料2は固体を想定し熱伝導のみを，材料3は空隙と想定し熱伝導及び移流は与えず計算した．材料1,2の密度比熱  $\rho c$  [J/cm<sup>3</sup>・K]，熱伝導率  $\lambda$  [W/m・K] を微視方程式から特性関数  $\chi_i$  を導き，均質化係数  $\rho^*$ ， $\lambda^*$ ， $V^*$  を求める．

また，液相を想定した材料1においては，図5に示すようなポテンシャル流れとして計算した速度場を与えた．境界条件としては，上部と下部に対しては速度ポテンシャル  $\Phi$  を与え，側面に対しては周期境界条件を与えた．

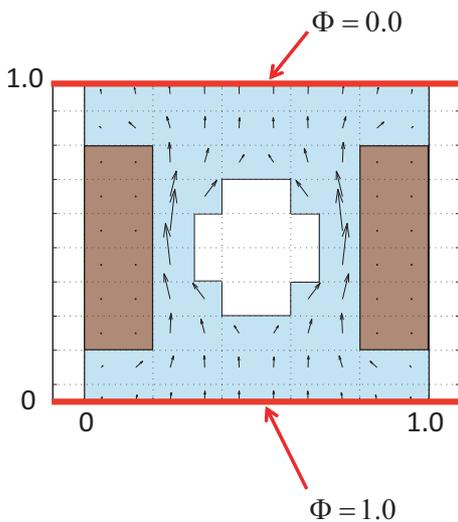


図-5 流れ場のベクトル図

### ● 材料1

$$\rho c = 1.0 \quad (22)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

### ● 材料2

$$\rho c = 1.0 \quad (24)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\rho^* = 0.88 \quad (26)$$

$$V^* = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.38 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\lambda^* = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.00 \\ 0.00 & 0.44 \end{pmatrix} \quad (28)$$

密度比熱  $\rho^*$  は単純に体積平均であり，移流  $v$  は鉛直方向 ( $y = 0 \rightarrow 1.0$ ) に行われており，水平方向にはほぼゼロである．移流速度  $V^*$  も満足いく値を示している．熱伝導率  $\lambda^*$  は材料1,2の間の値をとっており， $y$  軸方向に比べて  $x$  軸方向の熱伝導率が僅かに高い値を示している．

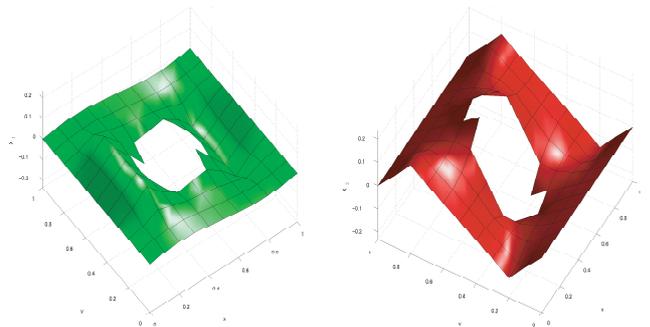


図-6 特性関数  $\chi$

ユニットセルは周期的に繰り返さなければならないので，特性関数  $\chi_i$  は周期境界条件  $\chi_x(x = 0) = \chi_x(x = 1)$ ， $\chi_y(y = 0) = \chi_y(y = 1)$  を満たす必要がある．図6はユニットセル内の特性関数  $\chi_i$  を表したもので，これを見るとそれぞれの周期境界条件を満たしていることが分かる．

次に，図7に示すようなミクロ構造に対して，均質化解析と単純な体積平均による熱伝導率の比較を行った．このモデルは土粒子の表面を覆う水の厚さ  $h$  を変化させることにより，飽和度を变化させるモデルである．図8のグラフは横軸が土粒子の表面を覆う水の厚さ、縦軸が熱伝導率であり，青丸のグラフが単純な体積平均、白丸のグラフが均質化法を導入した熱伝導率の変化である．グラフより、どちらの手法においても飽和度が上昇するにつれて，熱伝導率が上昇していることがわかるが，両者のグラフは一致しているとはいえず，均質化解析の結果が単純な体積平均とは異なることがわかる．

## 7. まとめ

本論文では、多孔質体地盤中の熱伝導現象のメカニズムを明らかにするために、熱伝導方程式を示し、さらに、ミクロレベルにおける構造と、それら微視的物性が反映された全体の挙動を求めることができる均質化理論について示した。

また、安定化有限要素法を用いた均質化解析により、固相・液相・気相の三相から成るモデルにより特性関数ならびに均質化係数の算出を行い、その結果から、本手法により、土粒子や間隙水の存在を考慮した地盤の温度解析への適用が可能であることを示した。

今後の課題としては、3次元への展開、現実的なミクロ流束場の設定とそれに基づく熱伝導現象の解析、ミクロ構造の評価が必要である。

## 参考文献

- 1) 寺田賢二郎：均質化法入門 丸善株式会社, 2003
- 2) 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会編：続・有限要素法による流れのシミュレーション シュプリンガー・ジャパン株式会社, 2008
- 3) 市川康明著：多孔質物体の輸送現象 微視と巨視の世界, 2010 学と変形体 構造力学入門 大学出版会, 2012

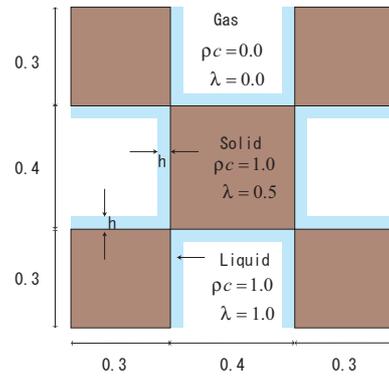


図-7 ユニットセルモデル B

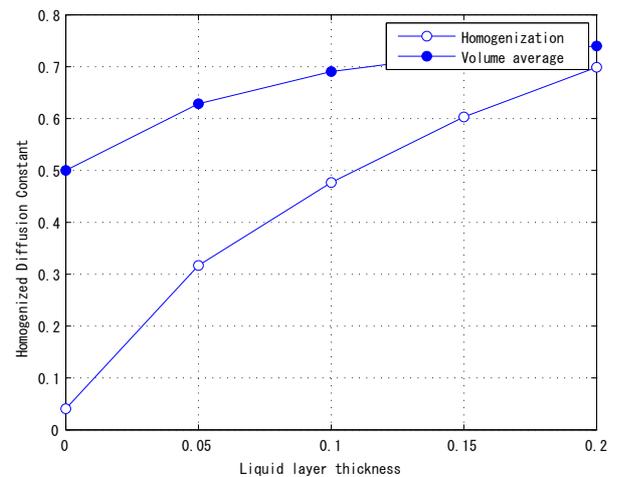


図-8 均質化法と体積平均  $\chi$