

複雑な地形起伏を有する場におけるWENO法を用いた平面2次元流れの数値計算

鳥取大学大学院 正会員 ○梶川 勇樹
鳥取大学大学院 正会員 檜谷 治

1. はじめに

従来、著者らは、移流項の差分化に5次精度WENO法（Weighted Essentially Non-Oscillatory Scheme）を用いた平面2次元浅水流モデルを開発し、ダム破壊流れ、および直線水路における常射流混在流れへの適用から、解析解あるいは実験値を良好に再現できることを示した¹⁾。しかし、上記で検討した条件は、平坦河床を対象としたものであり、ドライ・ウェット条件が頻繁に発生するような複雑な地形起伏を有する場への適用はなされていない。そこで、本研究では、WENO法を用いた平面2次元浅水流モデルを複雑な地形起伏を有する流れ場へ適用し、ドライ・ウェット条件の取り扱いについて検討した。

2. 数値計算モデル

基礎方程式は、(1)式に示されるように、平面2次元の浅水流方程式にFAVOR法を導入したものである¹⁾。水深平均レイノルズ応力に含まれる渦動粘性係数については0方程式モデルで評価した。また、計算格子にはレギュラー格子を採用した。

WENO法による移流項の差分化について、(2)式の x 方向移流項について簡単に説明する。まず、(3)-(5)式のように、各格子点で E_i を E_i^+ と E_i^- に分離する。分離手法にはLax-Friedrich分離を採用した。次に、各格子点上の $E_i^\pm$ から $\tilde{E}_{i+1/2}^+$ と $\tilde{E}_{i+1/2}^-$ を求め、これらを足し合わせることでセル境界での数値流束 $\tilde{E}_{i+1/2}$ を得る。 $\tilde{E}_{i+1/2}^+$ の算定方法を(6)-(15)式に示す。 $\tilde{E}_{i+1/2}^-$ については、 $\tilde{E}_{i+1/2}^+$ と対照に求めればよい。 y 方向移流項についても同様である。その他の項の差分化として、粘性項には2次精度中央差分を、圧力項には6次精度中央差分を適用した。時間積分には3次精度TVD Runge-Kutta法を適用した。また、境界条件として、側壁境界ではスリップ条件を課し、開水路の場合、上流端では流量を、下流端では自由流出とした。

ドライ・ウェット条件について説明する。従来のモデル¹⁾では、最小水深 $h_{\min}$ を設定し、ある地点の水深 h が $h < h_{\min}$ となった場合に、水深・流速とも0とし、また、周囲の水深が $h_{\min}$ 以上となった場合に、水深を $h_{\min}$ に回復させるといった簡易的な手法を用いていた。しかし、この手法を用いた場合、ドライベッドを有するダム破壊流れでは、 $h_{\min} \times (\text{ドライベッド面積})$ 分の体積が増加することになる。一方、(4)式に示されるように、本研究では連続式におけるフラックスの分離に水深 h ではなく水位 $h + z_b$ を用いているが、これは、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial A_x E}{\partial x} + \frac{\partial A_y F}{\partial y} \right) = C \quad (1)$$

$$U = \begin{bmatrix} h \\ M \\ N \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} M \\ uM \\ uN \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} N \\ vM \\ vN \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{1}{V} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (A_x \cdot \overline{-u'^2 h}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y \cdot \overline{-u'v' h}) \right\} \\ -gh \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho} + \frac{1}{V} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (A_x \cdot \overline{-u'v' h}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y \cdot \overline{-v'^2 h}) \right\} \end{bmatrix}$$

ここに、 t : 時間、 (x, y) : 空間座標、 V : 体積率、 (A_x, A_y) : (x, y) 方向の面積率、 (u, v) : (x, y) 方向の水深平均流速、 (M, N) : (x, y) 方向の流量フラックス、 g : 重力加速度、 h : 水深、 H : 水位 ($= h + z_b$)、 z_b : 河床位、 (τ_{bx}, τ_{by}) : (x, y) 方向の底面せん断応力、 $(-\overline{u'^2}, -\overline{u'v'}, -\overline{v'^2})$: 水深平均レイノルズ応力である。

$$\frac{1}{V} \frac{\partial A_x E}{\partial x} \Big|_i = \frac{A_{x,i+1/2} \tilde{E}_{i+1/2} - A_{x,i-1/2} \tilde{E}_{i-1/2}}{V_i \cdot \Delta x} + O(\Delta x^5) \quad (2)$$

$$E_i = E_i^+ + E_i^- \quad (3)$$

$$E_i^\pm = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} M \\ uM \\ uN \end{pmatrix}_i \pm \alpha \begin{pmatrix} h + z_b \\ M \\ N \end{pmatrix}_i \right] \quad (4)$$

$$\alpha = \max_U |\partial E / \partial U| \quad (5)$$

$$\tilde{E}_{i+1/2}^+ = \sum_{s=0}^2 \omega_s \tilde{E}_{i+1/2,s}^+ \quad (6)$$

$$\tilde{E}_{i+1/2,0}^+ = \frac{1}{3} E_{i-2}^+ - \frac{7}{6} E_{i-1}^+ + \frac{11}{6} E_i^+ \quad (7)$$

$$\tilde{E}_{i+1/2,1}^+ = -\frac{1}{6} E_{i-1}^+ + \frac{5}{6} E_i^+ + \frac{1}{3} E_{i+1}^+ \quad (8)$$

$$\tilde{E}_{i+1/2,2}^+ = \frac{1}{3} E_i^+ + \frac{5}{6} E_{i+1}^+ - \frac{1}{6} E_{i+2}^+ \quad (9)$$

$$\beta_0 = \frac{13}{12} (E_{i-2}^+ - 2E_{i-1}^+ + E_i^+)^2 + \frac{1}{4} (E_{i-2}^+ - 4E_{i-1}^+ + 3E_i^+)^2 \quad (10)$$

複雑な地形起伏を有する場合でも静水状態を維持できるように修正を加えたものである^{1),2)}。しかし、次章で示すように、地形起伏が大きく、且つドライベッドが発生するような条件下で(4)式を適用した場合、格子に存在する流体体積以上のフラックスが計算され、水が湧き出すような非物理的な現象が発生してしまう。

そこで、本研究では、ドライ・ウェットが発生する条件下で以下のような手法を適用した。まず、最小水深 $h_{\min}$ を設定し、ある地点の水深 h が $h < h_{\min}$ となった場合に、流速のみを 0 とした。次に、図-1 および図-2 に、 i 点に僅かでも水が存在する場合の $i + 1/2$ 点の取り扱いについて表したものを示す。図-1 に示されるように、 $i + 1$ 点の水深が 0 でも i 点の水位 $h_i + z_{bi}$ が $i + 1$ 点の水位 $h_{i+1} + z_{bi+1}$ より高い場合 (図-1 (a))、あるいは水位差に関係なく $i + 1$ 点に水が僅かでも存在する場合 (図-1 (b), (c)) には、 $i + 1/2$ 点を流体通過可能断面と考え、フラックスを計算する。一方、図-2 のように、 $i + 1$ 点に水が無く、且つ i 点の水位が $i + 1$ 点の水位以下の場合には固体壁面とした。また、ドライベッドが発生する場合における連続式のフラックス修正方法について、図-3 および(16)-(25)式に示す。ここでは、図-3 に示すように、格子の全方向から流体が流出する場合について示している。まず、(16)式および(17)-(21)式を用いて、格子内に存在する流体体積 VOL および格子から流出する流量 Q_{out} を求める。次に、 $VOL < Q_{out} \times \Delta t$ である場合にのみ、(22)-(25)式によりフラックスを修正する。これにより、連続式が厳密に満たされるため、体積誤差はゼロとなる。

3. モデルの適用性について

ここでは、地形起伏を有するダム破壊流れ³⁾、および実河川における洪水流を対象とし、旧モデル¹⁾および本研究で提案した新モデルの適用から、各モデルの妥当性について検討する。

1) 地形起伏を有するダム破壊流れ³⁾への適用

実験装置の概要を図-4 に示す。水路幅は 1.75m であり、氾濫部に三角形の障害物 (長さ 6m、高さ 0.4m) が設けられている。上流部に水深 0.75m の水が溜められており、瞬時に仕切りを取り除くことでダム破壊流れを発生させている。計算条件として、 $\Delta t = 0.01\text{sec}$ 、 $\Delta x = \Delta y = 0.1\text{m}$ とし、マニングの粗度係数は $n = 0.0125$ とした³⁾。また、 $h_{\min} = 1.0 \times 10^{-4}\text{m}$ とした。

計算結果として、図-5 に水面形状の時間変化を、図

$$\beta_1 = \frac{13}{12}(E_{i-1}^+ - 2E_i^+ + E_{i+1}^+)^2 + \frac{1}{4}(E_{i-1}^+ - E_{i+1}^+)^2 \quad (11)$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12}(E_i^+ - 2E_{i+1}^+ + E_{i+2}^+)^2 + \frac{1}{4}(3E_i^+ - 4E_{i+1}^+ + E_{i+2}^+)^2 \quad (12)$$

$$\omega_s = \alpha_s / \sum_{k=0}^2 \alpha_k \quad (s=0, 1, 2) \quad (13)$$

$$\alpha_k = d_k / (\varepsilon + \beta_k)^2 \quad (k=0, 1, 2) \quad (14)$$

$$d_0 = 0.1, \quad d_1 = 0.6, \quad d_2 = 0.3 \quad (15)$$

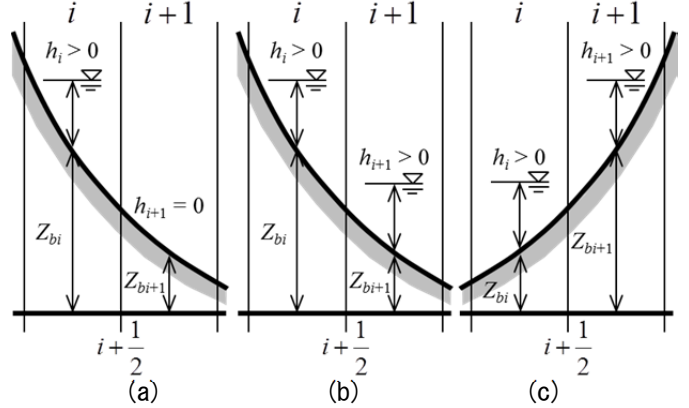


図-1 $i + 1/2$ 点を流体通過可能断面とする場合

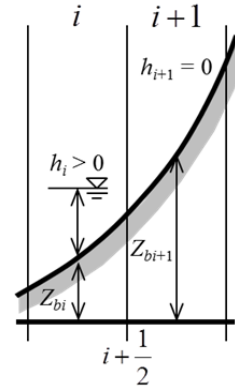


図-2 $i + 1/2$ 点を固体壁面とする場合

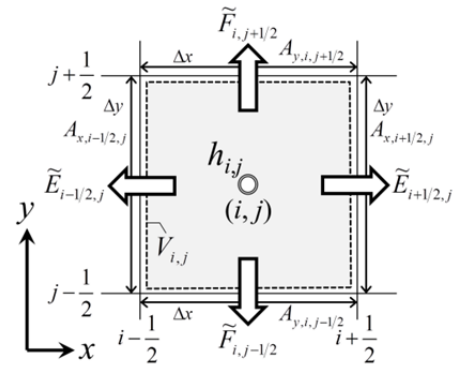


図-3 各変数の位置

$$VOL = V_{i,j} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot h_{i,j} \quad (16)$$

$$Q_{out} = \sum_{k=1}^4 Q_{out,k} \quad (17)$$

$$Q_{out,1} = A_{x,i+1/2,j} \cdot \Delta y \cdot \tilde{E}_{i+1/2,j} \quad (\tilde{E}_{i+1/2,j} > 0) \quad (18)$$

$$Q_{out,2} = -A_{x,i-1/2,j} \cdot \Delta y \cdot \tilde{E}_{i-1/2,j} \quad (\tilde{E}_{i-1/2,j} < 0) \quad (19)$$

$$Q_{out,3} = A_{y,j+1/2} \cdot \Delta x \cdot \tilde{F}_{i,j+1/2} \quad (\tilde{F}_{i,j+1/2} > 0) \quad (20)$$

$$Q_{out,4} = -A_{y,j-1/2} \cdot \Delta x \cdot \tilde{F}_{i,j-1/2} \quad (\tilde{F}_{i,j-1/2} < 0) \quad (21)$$

-6 に各計測点における水深の時間変化をそれぞれ示す。図-5 より、両モデルによる計算結果は、ダム破壊流れがドライベッド上を進行して障害物へ衝突、越流するとともに、30sec 後には再度障害物がドライ状態になる様子が再現されている。また、図-6 より、両モデルとも良好に実験結果を再現できていることが分かる。しかし、体積誤差を示すと、新モデルでは誤差 0%であったのに対し、旧モデルでは+ 0.0194%の誤差が表れた。これは、前章で述べた簡易的なドライ・ウェット条件を課したためであり、新モデルのような取り扱いが必要であることが分かる。

2) 実河川における洪水流への適用

鳥取県西部を流れる 2 級河川阿弥陀川では、2011 年台風 12 号時に洪水が発生し、護岸や護床工が流出する等の被害を受けた。ここでは、その被災箇所周辺を対象として 2011 年洪水時の流況の再現計算を試みる。現地河床形状を図-7 に示す。x=50~100m にかけて急激な落ち込みがあり、ここで護床工が流出する等の被災を受けた。計算条件として、 $\Delta t = 0.01\text{sec}$ 、 $\Delta x = \Delta y = 1.0\text{m}$ とし、マンニングの粗度係数を $n=0.03$ とした。また、 $h_{\min} = 3.0 \times 10^{-2}\text{m}$ とし、洪水時の流量 $Q=635\text{m}^3/\text{s}$ を一定流量として与えた。

計算結果として、まず、図-8 に流下方向の流量分布を示す。旧モデルの計算結果を見ると、上流端より一定流量 $635\text{m}^3/\text{s}$ を与えているにも関わらず、 $x=50\text{m}$ 付近から流量が徐々に増加し、最下流端では約 $950\text{m}^3/\text{s}$ にまで増加していることが分かる。これは、前章で述べたように、ドライベッドが発生する格子において、格子に存在する流体体積以上のフラックスが計算されているためであり、旧モデルの適用には問題があることが分かる。一方、新モデルの結果を見ると、 $x=80\text{m}$ 付近で跳水に伴う振動が見られるものの、流入流量と流出流量は一致しており、本研究で提案したドライ・ウェット条件が妥当であることが分かる。次に、図-9 に旧モデルおよび新モデルによる水面形鳥瞰図を、図-10 に新モデルによる平面流速ベクトル図それぞれ示す。図-9 より、旧モデルでは流下方向へ徐々に流量が増加しているため、新モデルによる結果と比較して全体的に水位が高い状況となっている。新モデルによる計算結果は、 $x=80\text{m}$ 付近で跳水が発生し、下流域では深い水みちに沿った複雑な水面形が表れている。しかし、計算は発散することなく、複雑な地形起伏を有す

$$\tilde{E}_{i+1/2,j} = VOL \times Q_{out,1} / (Q_{out} \cdot A_{x,i+1/2,j} \cdot \Delta y \cdot \Delta t) \quad (22)$$

$$\tilde{E}_{i-1/2,j} = -VOL \times Q_{out,2} / (Q_{out} \cdot A_{x,i-1/2,j} \cdot \Delta y \cdot \Delta t) \quad (23)$$

$$\tilde{F}_{i,j+1/2} = VOL \times Q_{out,3} / (Q_{out} \cdot A_{y,i,j+1/2} \cdot \Delta x \cdot \Delta t) \quad (24)$$

$$\tilde{F}_{i,j-1/2} = -VOL \times Q_{out,4} / (Q_{out} \cdot A_{y,i,j-1/2} \cdot \Delta x \cdot \Delta t) \quad (25)$$

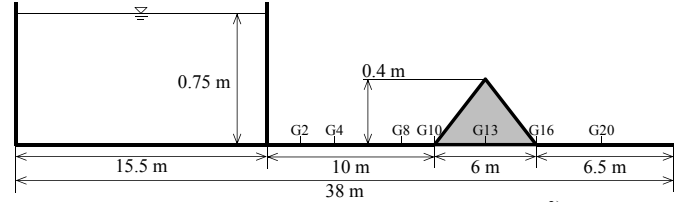


図-4 ダム破壊流れの実験装置概要³⁾

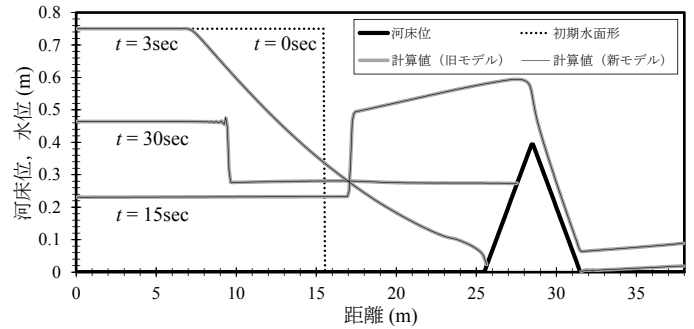


図-5 水面形の時間変化

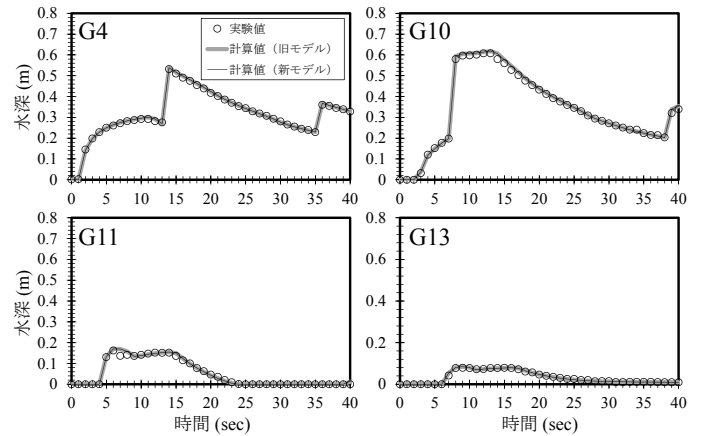


図-6 各計測点における水深の時間変化の比較

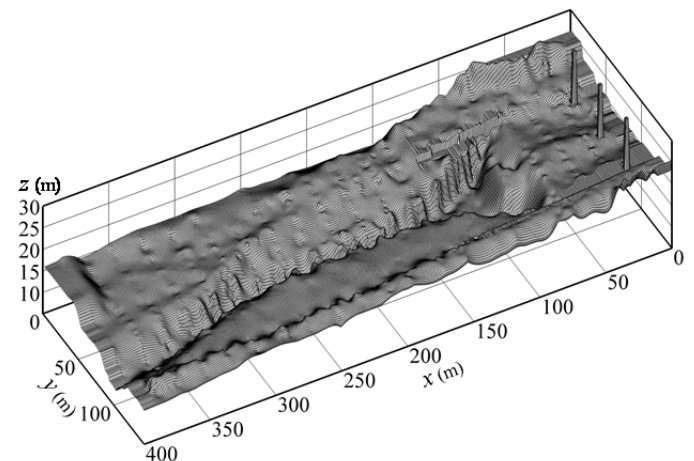


図-7 阿弥陀川河床形状

る場に対しても実行できている。図-10 の平面流速ベクトルを見ると、 $x=80\text{m}$ の落差付近では非常に速い流速が表れており、それが下流域の深い水みちに集中している様子が分かる。この流れが、護床工の流出を引き起こしたものと考えられる。

4. おわりに

本研究では、WENO 法を用いた 2 次元浅水流モデルを複雑な地形起伏を有する流れ場へ適用し、モデルの妥当性について検討した。その結果、本研究で示したドライ・ウェット条件の取り扱いにより、体積誤差を生ずることなく実験結果を良好に再現できることが示された。また、現地河川形状にも適用可能であることが分かった。現在、一般座標系への拡張、および河床変動モデルの導入を行っており、追って報告する次第である。

【謝辞】阿弥陀川の現地測量データについては、鳥取県よりご提供頂いた。ここに記して感謝の意を表す。

【参考文献】1) 梶川勇樹，檜谷治：WENO法を用いた平面2次元浅水流モデルの開発，水工学論文集，第57巻，pp.I_631-I_636，2013. 2) Xing, Y. and Shu, C.-W.: High order finite WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations, *J. Comput. Phys.*, 208, pp.206-227, 2005. 3) T. Chacón, E. D. Fernández, and M. Gómez: A flux-splitting solver for shallow water equations with source terms, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.42, pp.23-55, 2003.

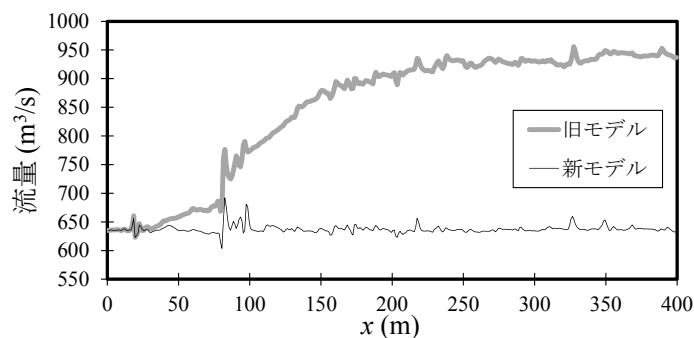
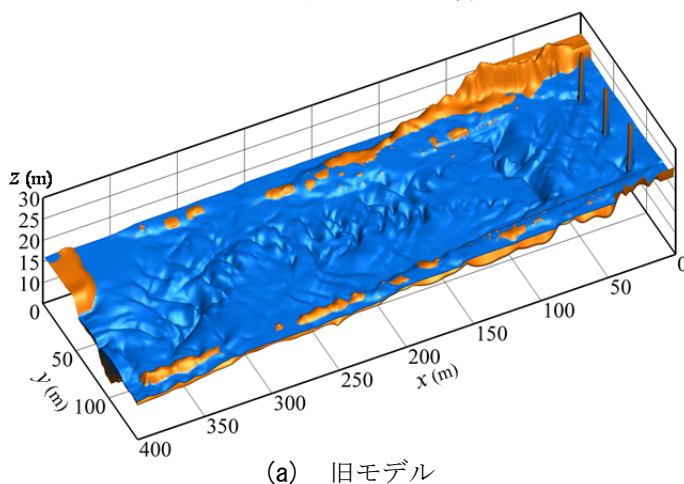
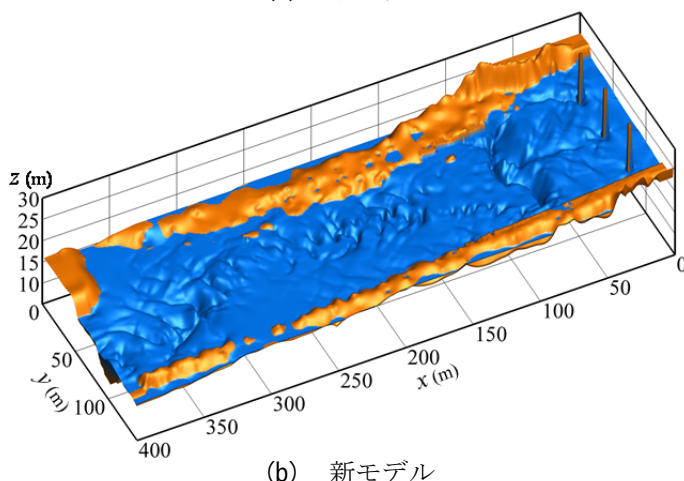


図-8 流下方向流量の分布



(a) 旧モデル



(b) 新モデル

図-9 水面形鳥瞰図

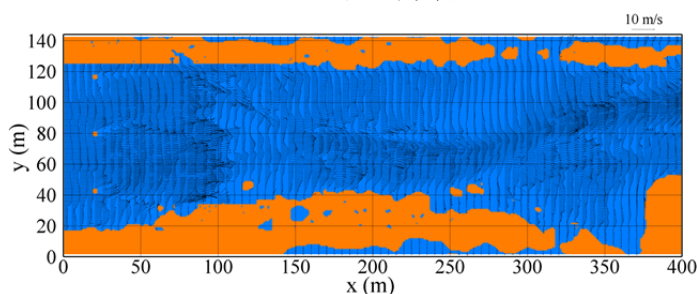


図-10 平面流速ベクトル図 (新モデル)