

# WENO法を用いた水制周辺の3次元流れに関する数値計算

株式会社建設技術研究所 正会員○三宅川 洋亮  
 鳥取大学大学院工学研究科 正会員 檜谷 治  
 鳥取大学大学院工学研究科 正会員 梶川 勇樹

## 1. はじめに

水制は、従来から進められている「多自然川づくり」の取り組みにおいて、河床変動の促進により周辺の河川環境に変化を与える機能が注目され、水はねによる治水効果に加えて、良好な河川環境の創出を目的として設置されている。それら水制には数多くの種類があり、目的によって各々の効果を考慮し、設置する必要がある。そのため、従来から水制に関する研究は実験的に、あるいは解析的に数多く行われている。

従来の研究により、水制周辺の流れは、たとえば水制直上流での馬蹄形渦の形成や下流の剥離域の形成など、3次元的な流況が発達することが明らかにされている。特に、越流型水制周辺では、水制を越流する流れも加わるため、非常に複雑な流況を呈する。本研究では、越流型水制周辺の流況を対象に3次元モデルを適用し、実験結果との比較からモデルの妥当性について検討した。

## 2. 数値計算モデル

### ① 3次元流れの基礎方程式

本数値モデルでは、座標系にデカルト座標系を採用し、基礎方程式にはFAVOR法を導入した<sup>1)</sup>。また、渦動粘性係数の評価には、非線形 $k-\varepsilon$ モデルを適用した。従来から様々な分野で適用されている標準型 $k-\varepsilon$ モデルでは、カルマン渦の発振が再現できないことが指摘されており、また、横流入部の渦運動や複横断面開水路流れにおける水平渦運動等のせん断不安定に起因する渦運動においても再現性が悪いことが報告されている<sup>2)</sup>。そのようなことから、標準型 $k-\varepsilon$ モデルにおいて、構成則に2次の非線形項を考慮し、かつストレイン・パラメータおよびローテーション・パラメータの効果を導入した非線形 $k-\varepsilon$ 方程式モデルを用いて計算を行うこととした。

### ① 基礎方程式

[運動方程式]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial x_j} \{A_{(j)} u_j u_i\} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{V} \frac{\partial A_{(j)} \cdot \overline{-u_i u_j}}{\partial x_j} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ A_{(j)} v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\}$$

[連続式] 
$$\frac{\partial}{\partial x_j} \{A_{(j)} u_j\} = 0$$

### ② 渦動粘性係数の評価モデル

[ $k$ -方程式]

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{1}{V} \left\{ \frac{\partial (A_{x_j} u_j k)}{\partial x_j} \right\} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{1}{V} \left\{ A_{x_j} v_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\}$$

[ $\varepsilon$ -方程式]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{V} \left\{ \frac{\partial (A_{x_j} u_j \varepsilon)}{\partial x_j} \right\} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{1}{V} \left\{ A_{x_j} v_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\}$$

[2次の非線形項まで考慮した構成則]

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \frac{k}{\varepsilon} v_i \sum_{\beta=1}^3 C_{\beta j} \left( S_{\beta ij} - \frac{1}{3} S_{\beta \alpha \alpha} \delta_{ij} \right)$$

### ③ 基礎方程式における移流項の差分化(WENO法)

$$\frac{1}{V} \frac{\partial E}{\partial x_{x_i}} \Big|_{x_i} = \frac{A_{-xi+1/2,j,k} E_{i+1/2,j,k} - A_{xi-1/2,j,k} E_{i-1/2,j,k}}{V \cdot \Delta x} + O(\Delta x^5)$$

$$E_{i+1/2,j,k} = w_0 \bar{E}_0 + w_1 \bar{E}_1 + w_2 \bar{E}_2$$

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{3} E_{i-2,j,k} - \frac{7}{6} E_{i-1,j,k} + \frac{11}{6} E_{i,j,k}$$

$$\bar{E}_1 = -\frac{1}{6} E_{i-1,j,k} + \frac{5}{6} E_{i,j,k} + \frac{1}{3} E_{i+1,j,k}$$

$$\bar{E}_2 = \frac{1}{3} E_{i,j,k} + \frac{5}{6} E_{i+1,j,k} - \frac{1}{6} E_{i+2,j,k}$$

$$w_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad w_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad w_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\alpha_0 = \frac{0.1}{(\varepsilon + \beta_0)^2}, \quad \alpha_1 = \frac{0.6}{(\varepsilon + \beta_1)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{0.3}{(\varepsilon + \beta_2)^2}$$

$$\beta_0 = \frac{13}{12} \{E_{i-2,j,k} - 2E_{i-1,j,k} + E_{i,j,k}\}^2 + \frac{1}{4} \{E_{i-2,j,k} - 4E_{i-1,j,k} + 3E_{i,j,k}\}^2$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12} \{E_{i-1,j,k} - 2E_{i,j,k} + E_{i+1,j,k}\}^2 + \frac{1}{4} \{E_{i-1,j,k} - E_{i+1,j,k}\}^2$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12} \{E_{i,j,k} - 2E_{i+1,j,k} + E_{i+2,j,k}\}^2 + \frac{1}{4} \{3E_{i,j,k} - 4E_{i+1,j,k} + E_{i+2,j,k}\}^2$$

② 移流項の差分化 (WENO 法)

本研究では、流れの基礎方程式の移流項に WENO 法を新たに導入する<sup>3)</sup>。WENO 法は、Jiang ら<sup>3)</sup>によって提案され、宇宙開発や海岸分野では導入されているが、河川分野においてはあまり適用事例がない。そこで、本モデルに導入し、妥当性を検討する。WENO 法のアイデアの基となった ENO 法では、風上差分を改良し、複数のステンシルの中で、最も滑らかなステンシルを選びだし、その関数を使用する 3 次精度を実現した方法である。WENO 法は、この ENO 法の考えを改良し、複数のステンシルの非線形で連続な重み付き平均とする関数を使用することで 5 次精度を実現した方法である。それによって、定常解でのステンシルの切り替わりが原因の数値振動を抑え、より少ないステンシル数での高次精度化を目指した手法である。

3. 越流型不透水水制周辺における流れの数値計算

従来、越流型水制周辺の流れの数値計算においては、水制による水はね効果が十分に再現されないことや、水制下流部の水面近傍における流速の逡減が表現されないことなどが指摘されている<sup>1)</sup>。そのようなことから、新たに流れの基礎方程式の移流項に、従来用いていた QUICK 法に代わり、WENO 法を導入した。ここでは、鳥取大学工学部土木工学科水工学研究室で行われた越流型不透水水制を対象とした水理実験の再現を行い、実験結果と QUICK 法および WENO 法を用いた数値モデルによる計算結果との比較を行う。図-1 に示すのは軸の定義であり、以降これに従う。表-1 に計算条件を示す。実験水路は水路長 10m, 水路幅 0.40m であり、水路勾配を 1/2500 として行われた。計算時間は、流況が安定する 60 秒間とした。

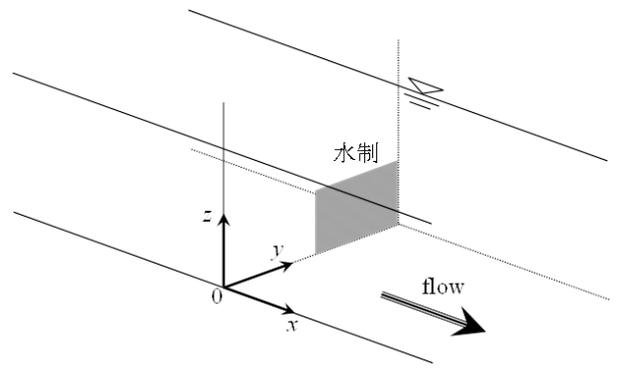


図-1 水制周辺における軸の定義

表-1 計算条件

単位幅流量 $Q(\text{cm}^3/\text{s})$	0.015	
下流端水深 $h(\text{cm})$	10.0	
水制幅 (cm)	3.0	
水制高 (cm)	5.0	
水制長 (cm)	10.0	
計算時間間隔 $\Delta t(\text{sec})$	0.001	
流下方向メッシュ間隔 $\Delta x(\text{cm})$	1.0	
鉛直方向メッシュ間隔 $\Delta y(\text{cm})$	1.0	
鉛直方向メッシュ間隔 $\Delta z(\text{cm})$	0.5	
メッシュ数	x方向	300
	y方向	40
	z方向	50

【水面形の比較】

図-2 は、 $x$ - $z$  断面における水面形の比較を示している。流れの基礎方程式の移流項に用いた差分法の違いはほとんど見られず、QUICK 法、WENO 法ともに実験結果をよく再現している。しかし、QUICK 法では、水制上流部で数値振動が表れているのに対し、WENO 法では振動を起こすことなく、滑らかに表現できている。これは、WENO 法の特徴により数値振動が抑えられた結果であるといえる。

図-3 は、水面形コンター図を示している。図-2 と同様に、QUICK 法では水制上流部での振動が見られるものの、WENO 法ではそれが改善されている。

【鉛直流速分布の比較】

図-4 は、 $x$ - $z$  断面における流下方向の流速分布を示している。各結果を比較すると、QUICK 法および WENO 法ともに実験結果を良く再現しているといえる。

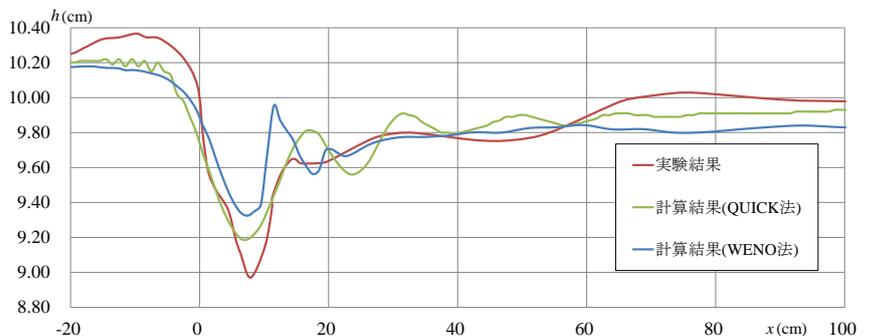


図-2  $x$ - $z$  断面における水面形の比較( $y = 28\text{cm}$ )

しかし、 $x = 0\text{cm}$ を見ると、実験では底面付近の流速がかなり遅くなっているのに対し、QUICK 法ではそれが十分に再現されていない。一方、WENO 法では、実験値程ではないものの、流速の減少が再現されている。また、 $x = 10\text{cm}$ を見ると、QUICK 法では水制下流部の水面付近の流速が過減していないものの、WENO 法では水面付近の流速分布も再現できている。

【流速ベクトルの比較】

図-5 は、 $y$ - $z$  断面における流速ベクトルを示している。流速ベクトルに関しては、QUICK 法、WENO 法ともに、良好に実験結果を再現できている。特に、水制の水はね効果により左岸から流心へと向けられた流れが、下流域で水制背後に流れ込み渦流が発達している様子など、良好に再現できていることが分かる。

図-6 は、 $x$ - $y$  断面における河床近傍の流速ベクトルを示している。河床近傍の流速分布は、河床変動に大きく影響する。水制下流部の剥離域に注目すると、実験結果は水制下流 30cm 前後の領域に形成されており、一方の QUICK 法、WENO 法による計算結果も実験結果とほぼ同様の大きさとなっていることが分かる。このようなことから、河床近傍の流速に関しては、良好に再現できていると考える。

4. まとめ

本研究では、越流型不透過水制周辺の流れ場を対象とし、移流項に WENO 法を用いた 3 次元流れの数値モデルを適用して、実験結果との比較からモデルの妥当性について検討した。その結果、QUICK 法を用いた従来のモデルに比べて再現性を向上させることができた。本研究では、越流型不透過水制についてのみ検討を行ったが、水制の種類には、その他、非越流型や透過水制などが存在し、それらを対象とした検討も必要であると考えられる。また、今後は河床変動モデルの導入についても検討を進めていく予定である。

【参考文献】 1) 梶川勇樹：河川における局所洗掘現象の数値解析法に関する研究，鳥取大学学位論文，2005。 2) 木村一郎，細田尚：非線形  $k$ - $\epsilon$  モデルによる角柱周辺流れの 3 次元解析，水工学論文集，第 43 巻，pp.383-388，1999。 3) GUANG-HAN JIANG：Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes，pp.202-228，1996。

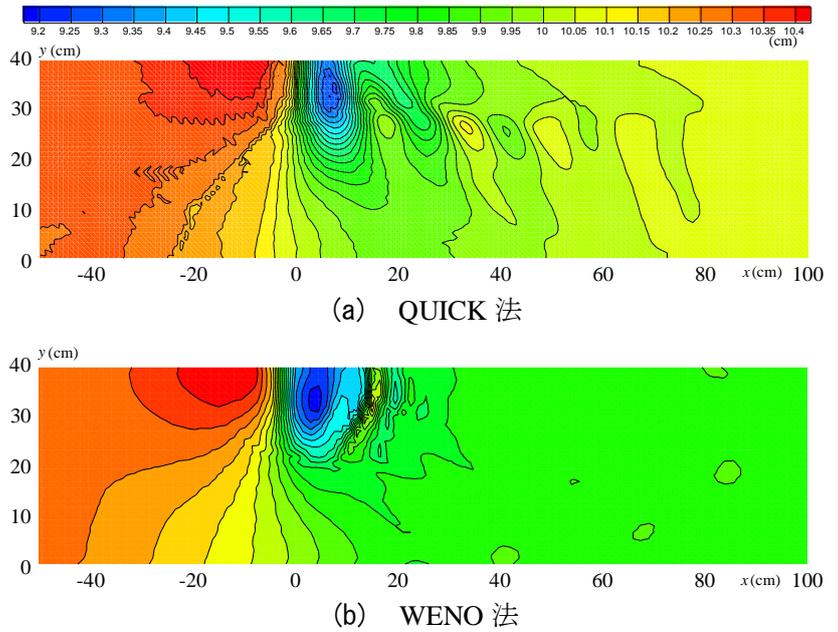


図-3 水面形のコンター図

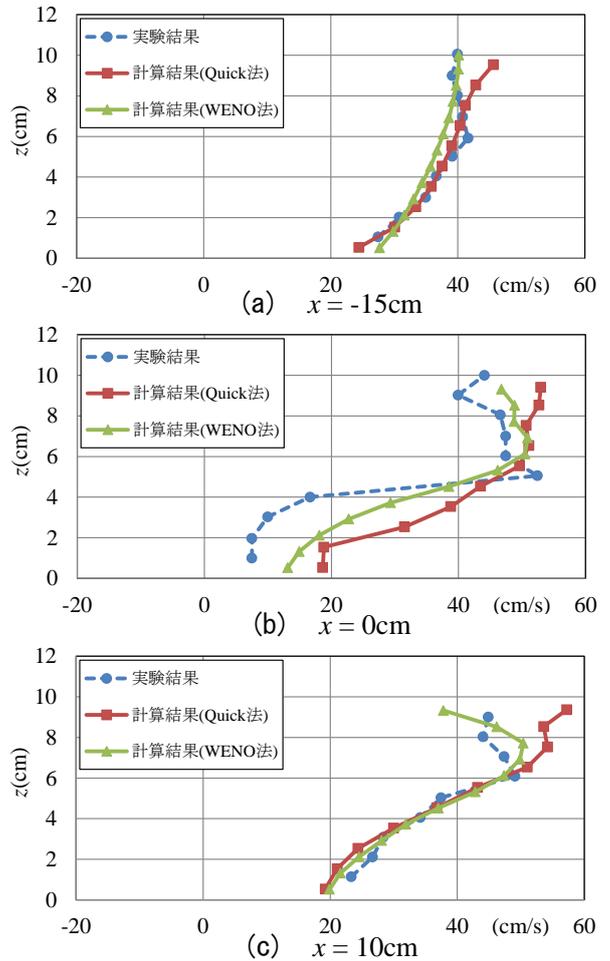


図-4 下流方向流速の比較( $y = 28\text{cm}$ )

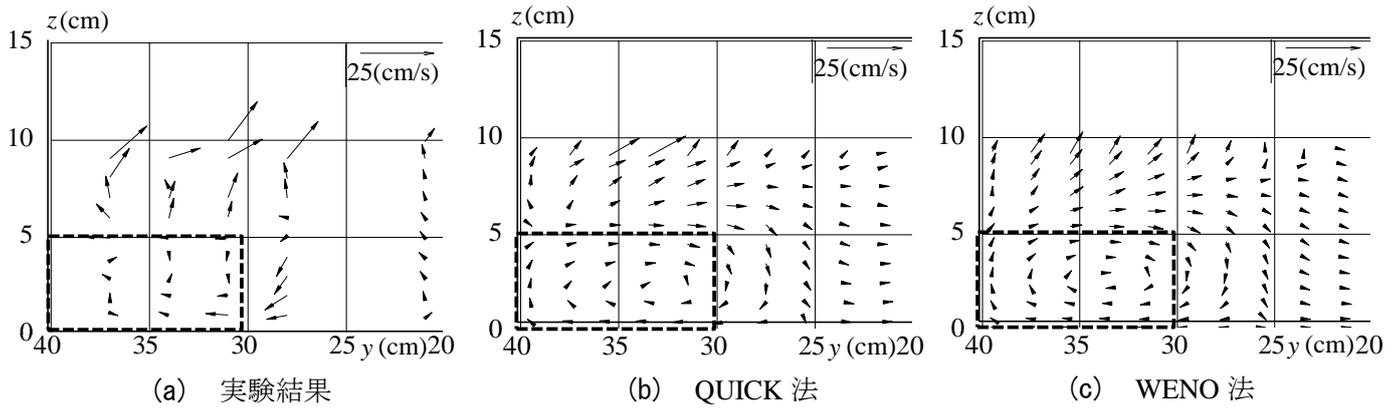


図-5  $y$ - $z$  断面における流速ベクトル( $x = 10\text{cm}$ )

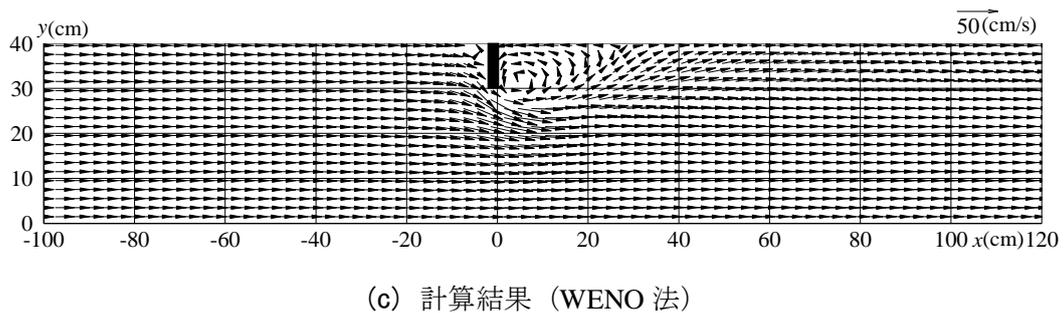
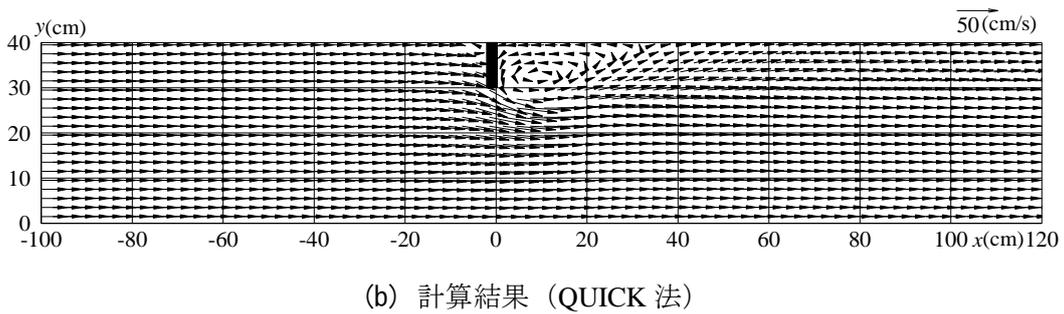
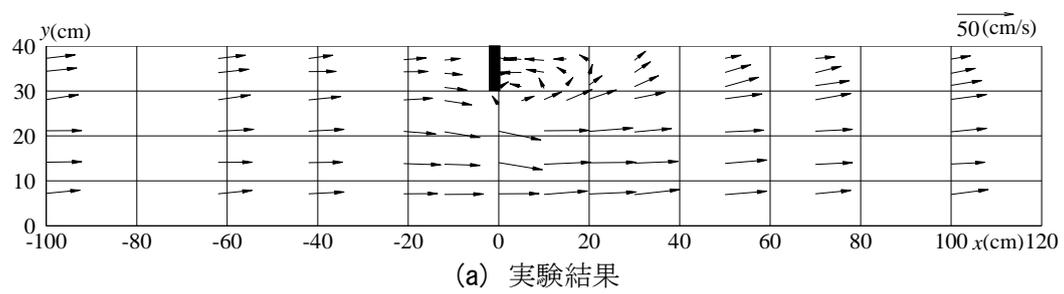


図-6  $x$ - $y$  断面流速ベクトル図 (河床近傍)