台形型貯槽のスロッシングの固有周期の算定方法の検討

鳥取大学大学院　学生員　○由里太二郎
鳥取大学大学院　正会員　　谷口朋代
鳥取大学大学院　正会員　　小野祐輔

1.はじめに

Los Angeles Reservoir(LAR)と呼ばれる楕円型（断面は台形）の貯槽内の液面が 1994 年の Northridge earthquake（Mw=6.7）によって大きく振動する問題が発生した[1)]。長方形型・円筒型・球体型・楕円型の貯槽のスロッシングの固有周期の算定式は明らかにされているが[2)]、断面が台形の貯槽においては未だ明らかにされていない。そこで、台形断面の貯槽のスロッシングの固有周期が算定できれば、その問題を改善できるのではないかと考えた。

本研究では、文献[2)]による解析方法をもとに、計算を簡易化するため、台形型貯槽を長方形型に領域変換してスロッシングの基礎式を与え、固有角振動数の式を導いた。それから、本研究の結果を既往の解析結果[3)]と比較し、算定方法の妥当性を検討した。

2.台形断面の貯槽のスロッシングの基礎式

図－１に台形断面の貯槽の解析モデルを示す。 貯槽は高さh、底面幅$2l$、上底幅$2m+2l$、壁面と底面との成す角θとし､水平方向の地震動を受けた場合について考える。地動変位を$u=A\sin(\omega t+\delta)$とする。いま、液体が非圧縮性完全流体であり、渦なし流であると仮定すると、液体の運動は速度ポテンシャルΦを用いて次の４つの式により記述することができる。

連続の式は、

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

側壁における境界条件は

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\omega A\cos(\omega t+\delta)$$
$$(x=\text{左の側壁、右の側壁}) \qquad (2)$$

底面における境界条件は

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \qquad (y=0) \qquad (3)$$

自由表面における境界条件は

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \qquad (y=h) \qquad (4)$$

ここで、台形断面では(2)の左右の側壁の境界条件が複雑になるため、図－１の台形領域の貯槽を図－２の長方形領域に変換してスロッシングの基礎式を表す。ただし、簡単のためにYは独立変数とした。x, y 座標をX,Y座標を用いて表す。

$$x=\left(1+\frac{m}{l}\frac{Y}{h}\right)X \qquad (5)$$

$$y=Y \qquad (6)$$

微分演算子を座標変換すると、領域変換した連続の式と境界条件が得られる。ただし、式(5)のYは独立変数とする。

このとき、連続の式は

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}\left(\frac{1}{1+\frac{m}{l}\frac{Y}{h}}\right)^2+\frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2}=0 \qquad (7)$$

側壁における境界条件は、

$$\frac{\partial}{\partial X}\Phi(0,Y)=\omega A\cos(\omega t+\delta)\left(1+\frac{m}{l}\frac{Y}{h}\right) \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\Phi(2l,Y)=\omega A\cos(\omega t+\delta)\left(1+\frac{m}{l}\frac{Y}{h}\right) \qquad (9)$$

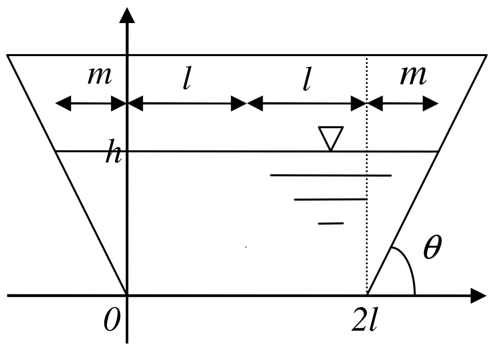
底面における境界条件は、

$$\frac{\partial}{\partial Y}\Phi(X,0)=0 \qquad (10)$$

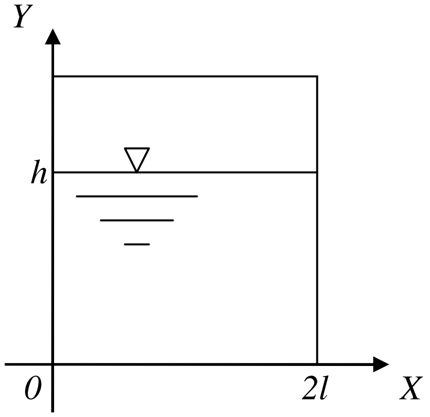
自由表面における境界条件は、領域変換は時間とは無関係であるから、

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(X,h)+\frac{\partial}{\partial Y}\Phi(X,h)=0 \qquad (11)$$

となる。



図－1　台形断面の貯槽



図－2　長方形断面の貯槽

3.固有角振動数に相当する項の導出

変数分離解を仮定すると、次の 3 式が得られる。

$$\Phi(X,Y)=P(X)\cdot Q(Y) \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2 P(X)}{\partial X}-\alpha P(X)=0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 Q(Y)}{\partial Y}-\frac{\beta}{\left(1+\frac{m}{lh}Y\right)^2}Q(Y)=0 \qquad (14)$$

ここに、(α,β:分離定数)

式(14)には係数に変数 Y が含まれているので、次のように変換する。

$$U=1+\frac{m}{lh}Y \qquad (15)$$

とおいて、Q(Y)を Q(U)に置き換えると、次式が得られる。

$$\left(\frac{m}{lh}\right)^2 U^2\frac{d^2Q(U)}{dU^2}-K^2Q(U)=0 \qquad (16)$$

さらに、式(16)は変数係数型微分方程式なので、定数係数型微分方程式に変換する[4)]。変数変換 $S=\log U$ すなわち $U = e^s$ とおいて、Q(U)を Q(S)に置き換えると次の定数係数型微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2Q}{dS^2}-\frac{dQ}{dS}-\frac{K^2l^2h^2}{m^2}Q=0 \qquad (17)$$

式(12)、(13)、(17)を境界条件(8)～(11)を満たすように解いて固有角振動数に相当する項を導くと、次式が得られる。

$$\omega=\left\{-\frac{g}{e^{\frac{1}{2}k}}\frac{m}{m+lh}\frac{\frac{1}{2}e^{(\frac{1}{2}+R)k}(1+J)+RJe^{(\frac{1}{2}+R)k}-Re^{(\frac{1}{2}-R)k}}{Je^{Rk}+e^{-Rk}}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (18)$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad (19)$$

ここに、ωは固有角振動数である。

$$k = \log(1 + \frac{m}{l}) \tag{20}$$

$$J = \frac{2R-1}{1+2R} \tag{21}$$

$$R = \frac{\sqrt{1+4\beta(\frac{lh}{m})^2}}{2} \tag{22}$$

4. 考察

既往の研究結果と固有角振動数ωの本研究の算定結果を表－1 にまとめた。既往の研究結果に使用したタンクモデル($L = 2l$, h , θ)[3]と同様の数値を式(18),(20),(21),(22)に代入して表－1 に示す結果を得た。

その結果、表－1 より、$l = 0.03$ m, $h = 0.03$ m, $\theta = 60$度のタンクのとき ω=4.084rad/s となった。既往の研究結果と比べると、算定結果の数値は既往の研究結果のおよそ 1/4 倍になった。

一方、$l = 30$ m, $h = 30$ m, $\theta = 60$度のタンクのとき、ω=0.576 rad/s となった。既往の研究結果と比べると、算定結果の数値は既往の研究結果よりおよそ 1/10 倍大きい値となった。これらのように、算定結果が既往の解析結果と一致しなかった。その原因は、台形領域を長方形領域に変換してスロッシングの基礎式を表したが、本研究で行った領域変換では簡易のためにＹを独立変数として取り扱ったため、算定結果は実際のスロッシング現象よりＹの変化が小さい値となったと考えられる。

表－1　固有角振動数 ω の既往の研究結果と算定結果

	既往の研究結果 (rad/s)		算定結果 (rad/s)	
ω	15.4	0.467	4.084	0.576

5. 今後の課題

本研究では台形断面の貯槽から長方形型に領域変換する際に式(5)の X と Y が従属関係であるとして再計算する必要がある。また、等角写像を用いて台形断面の貯槽のスロッシングを長方形型で表す方法も検討する必要がある。

参考文献

1） Wai-Fah Chen, Charles Scawthorn: Earthquake Engineering Handbook，chapter.9 pp.59-60，2002.
2) 日本機械学会：事例に学ぶ流体関連振動，技報堂出版，第 8 章 pp.338-341，2008.
3) Koji Ogata: Sloshing analysis of sloping wall reservoir － Application of Smoothed Particle Hydrodynamics，pp.13-24，京都大学修士論文，2008.
4) 福原満州雄，稲葉三男：微分方程式通論，共立出版株式会社，pp.52，1959.