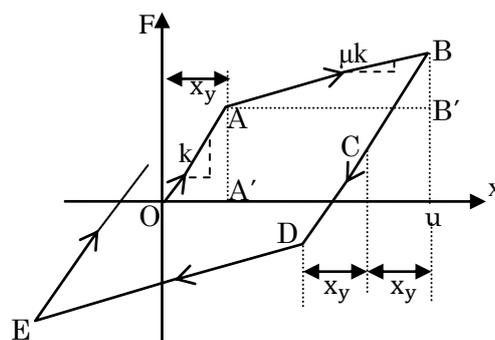


1 自由度弾塑性系における塑性後の弾塑性歪エネルギーの定式化に基づく等価線形化

鳥取大学大学院 学生員 ○西樂 大輝
 鳥取大学工学部 正会員 谷口 朋代
 鳥取大学工学部 正会員 小野 祐輔

1.はじめに

構造物が地震力を受けて塑性域に至る場合、非線形最大応答変位を推定し、その塑性変形量を知ることが耐震設計上重要となる¹⁾。そして、構造物に生じる非線形最大応答変位を簡易的に推定する方法として、エネルギー一定則や変位一定則、等価線形化法等が提案されているが、適用できる構造物の固有周期に制限がある等の短所がある。そこで、本研究ではどのような条件でも精度良くかつ簡易的に非線形最大応答変位を推定することを目的としている。



x_y : 降伏変位 k : 初期剛性
 μ : 剛性低下率 u : B点での変位

図1 バイリニア型復元力

2.本研究で提案する等価線形化法について

本研究では、図1に示すバイリニア型復元力特性を持つ、弾塑性系が外力を受けて運動する場合に系内に保存されるエネルギー量と系外へ放出されるエネルギー量に基づいて等価線形化を試みる。図1において、降伏点をA、最大変位点をB、最大変位から降伏変位 x_y だけ変位が減少した点をC、B点から変位が $2x_y$ 減少した点をD、変位が増加し始める点をEとする。なお、簡単のため粘性減衰を無視する。

系内に保存されるエネルギー量と系外へ放出されるエネルギー量を明らかにするために、1自由度振動系にインパルス加速度を与え、非線形時刻歴応答解析を行った。完全弾塑性体として解析を行った結果を表1に示す。表1より、完全弾塑性体の場合、BC間で増加した運動エネルギーと減少した全歪エネルギーの量が等しくなっている。すなわち、OA間で系内に保存された歪エネルギー $W_1(\Delta OAA')$ がBC間で全て運動エネルギーに変換されている。一方、二次剛性を有する系として解析を行った結果を表2に示す。表2より、二次剛性がある場合では歪エネルギー W_1 よりもBC間の運動エネルギーの増分が大きくなっている。これは、二次剛性によって系内に保存されるエネルギー $W_2(\Delta ABB')$ の一部が歪エネルギー W_1 に加算され、運動エネルギーに変換されたためである。そこで、運動方程式の全歪エネルギーに相当する項を基にして、BC間における全歪エネルギーの変化量 ΔW_{BC} を定式化する。

表1 完全弾塑性体におけるエネルギー量の推移 ($\times 10^{-10}$ N·m)

点	入力エネルギー	運動エネルギー	全歪エネルギー	全エネルギー(総和)	全歪エネルギーの増減
O	2.0000	0.0000	0.0000	2.0000	0.0000
A	0.0000	1.8401	0.1599	2.0000	+0.1599
B	0.0000	0.0000	2.0000	2.0000	+1.8401
C	0.0000	0.1599	1.8401	2.0000	-0.1599
D	0.0000	0.0000	2.0000	2.0000	+0.1599

表 2 二次剛性を有する系におけるエネルギー量の推移 (× 10⁻¹⁰ N・m)

点	入力エネルギー	運動エネルギー	全歪エネルギー	全エネルギー(総和)	全歪エネルギーの増減
O	2.0000	0.0000	0.0000	2.0000	0.0000
A	0.0000	1.8402	0.1597	1.9999	+0.1597
B	0.0000	0.0000	2.0000	2.0000	+1.8402
C	0.0000	0.1947	1.8053	2.0000	-0.1947
D	0.0000	0.0701	1.9298	1.9999	+0.1246
E	0.0000	0.0000	2.0000	2.0000	+0.0701

表 3 (3)式の右辺の各項のエネルギー(× 10⁻¹⁰ N・m)

$\frac{1}{2} \mu k x_2^2$	$k x_y x_2$	$\mu k x_y x_2$
0.0952	1.7449	0.0349

塑性後(A B 間)の復元力は次式で示される。

$$F(x) = \mu k x + k x_y (1 - \mu) \quad (1)$$

さらに、歪エネルギーを求めるために、(1) 式を変位で積分すると次式を得る。

$$W_e + W_p = \frac{1}{2} \mu k (u - x_y)^2 + k x_y (1 - \mu) (u - x_y) \quad (2)$$

ここで、B 点での変位を u とし、積分範囲は降伏変位から変位 u までとした。さらに、塑性変形量 $x_2 (=u-x_y)$ を用いると (2) 式は次式となる。

$$W_e + W_p = \frac{1}{2} \mu k u_2^2 + k x_y x_2 - \mu k x_y x_2 \quad (3)$$

ここに、 W_e 、 W_p はそれぞれ弾性歪エネルギー、塑性歪エネルギーである。

(3)式の右辺の各項ごとに B 点でのエネルギーを求めたものを表 3 に示す。BC 間における全歪エネルギーの変化量 ΔW_{BC} (0.1947)は、表 3 における $\mu k x_y x_2$ の値(0.0349)と歪エネルギー W_1 (0.1597)を加算したものとほぼ一致することから、次式となる。

$$\Delta W_{BC} = -(W_1 + \mu k x_y x_2) = -\frac{1}{2} k x_y^2 - \mu k x_y x_2 \quad (4)$$

また、CD 間の全歪エネルギーの変化量 ΔW_{CD} (0.1246)は歪エネルギー W_1 (0.1597)から $\mu k x_y x_2$ の値(0.0349)を減算したものとほぼ一致することから次式となる。

$$\Delta W_{CD} = W_1 - \mu k x_y x_2 = \frac{1}{2} k x_y^2 - \mu k x_y x_2 \quad (5)$$

(4)、(5)式より、BD 間で $\mu k x_y x_2$ の 2 倍の歪エネルギー量が減少している。このことを用いて弾性歪エネルギー、応答履歴ループ 1 サイクル間に系外へ放出されるエネルギーを定式化する。

応答変位は確率変数で表され、その確率密度関数はガウス分布 $p(x)$ で近似できると仮定すると、応答履歴ループ 1 サイクル間の弾性歪エネルギー $\langle W_e \rangle$ と塑性歪エネルギー $\langle W_p \rangle$ は次式となる。なお、確率密度関数に基づく種々の期待値は $\langle \quad \rangle$ で表す。

$$\langle W_e \rangle = \int_0^{x_y} \frac{1}{2} k x^2 p(x) dx + \int_{x_y}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} k x_y^2 + \frac{1}{2} \mu k (x - x_y)^2 - 2 \mu k x_y (x - x_y) \right\} p(x) dx \quad (6)$$

$$\langle W_p \rangle = \int_{x_y}^{\infty} \{ k x_y (x - x_y) + 2 \mu k x_y (x - x_y) \} p(x) dx \quad (7)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma : \text{標準偏差}) \quad (8)$$

また、等価剛性 k_{eq} を有する等価線形系が保存する弾性歪エネルギーは次式となる。

$$\langle W_{eeq} \rangle = \int_0^\infty \frac{1}{2} k_{eq} x^2 p(x) dx = \frac{k_{eq}}{4} \sigma^2 \quad (9)$$

等価剛性 k_{eq} と初期剛性 k の比を η と表すことにすると、(6)式と(9)式を等置して等価剛性 k_{eq} を得る。

$$k_{eq} = k \cdot \eta \quad (10)$$

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -\frac{1+5\mu}{\gamma} e^{-\frac{1}{2\gamma^2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+5\mu}{\gamma^2} + \mu \right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \mu - \frac{1+5\mu}{\gamma^2} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\gamma} \right) \right\} \quad (11)$$

ここで、 $\operatorname{erf}(x)$ は誤差関数であり次式で表される。

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz \quad (12)$$

履歴応答曲線の1サイクル間に系外に放出されたエネルギー ΔW と系に蓄えられる最大の歪エネルギー W との関係から、等価減衰定数 h_{eq} は次式となる。

$$h_{eq} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Delta W}{W} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\langle W_p \rangle}{\langle W_{eeq} \rangle} \right) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\int_{x_y}^\infty \{ kx_y(x - x_y) + 2\mu k x_y (x - x_y) \} p(x) dx}{\int_0^\infty \frac{1}{2} k_{eq} x^2 p(x) dx}$$

$$= \frac{1+2\mu}{\pi \sqrt{2\pi}} \left[\frac{x_y}{\sigma} e^{-\frac{x_y^2}{2\sigma^2}} - \frac{x_y^2}{\sigma^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x_y}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right\} \right] \cdot \frac{1}{\eta} \quad (13)$$

3 従来の等価線形化法との比較

これまでに開発された等価線形化法として、最大剛性点を用いた方法²⁾、押部が提案した等価線形化法³⁾等が挙げられる。図2に各等価線形化法で求めた等価剛性と線形系の剛性との比 $\eta (= k_{eq}/k)$ と塑性率 $\gamma (= \sigma/x_y)$ の関係、等価減衰定数 h_{eq} と塑性率 γ の関係をそれぞれ比較したものを示す。なお、ここで用いる塑性率 γ は、応答変位の標準偏差 σ を3倍した値を降伏変位 x_y で除したものとした。

図2より本研究で求めた剛性比 η は押部の式と類似しているが、最大点剛性法とは異なる結果となった。これは、想定した弾性歪エネルギーのモデル化の違いが原因となったと考えられる。一方、等価減衰は塑性率が0~1、5~10の範囲では最大移転剛性法で求めたものと本研究で求めたものは近い値となったが、それ以外の範囲の塑性率では異なる値となった。また、押部の式によるものは他のものとは大きく異なる値となった。こ

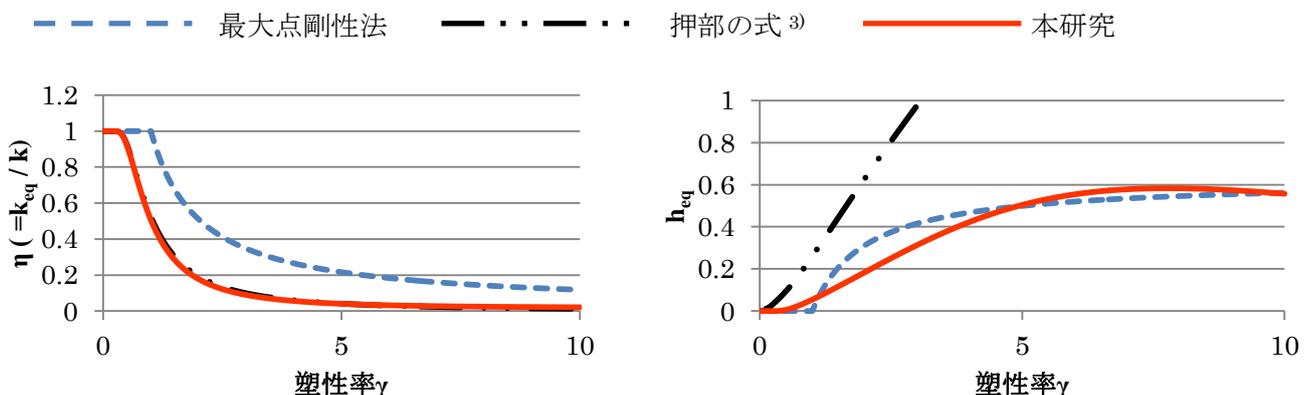


図2 各等価線形化法で求めた剛性比 η 、等価減衰定数 h_{eq} の比較

のことにしても、想定した消費エネルギーのモデルの違いが原因と考えられる。

4.等価線形化法の精度の検証

次に、本研究が提案した等価線形系、最大点剛性を用いた手法、押部が提案した手法に対して JMA 神戸波(NS 成分)、JR 鷹取波(NS 成分)、ポートアイランド波(NS 成分)を与えて求めた最大応答変位と弾塑性応答解析で求めた応答変位の時刻歴の最大値を比較した結果を図 3~5 に示す。なお、線形時の固有周期を横軸にとった応答変位スペクトルで表し、剛性低下率 μ は一般的な値として 0.02 とした。また、この時用いる降伏変位を求める方法として、まず固有円振動数 $\omega_n (=2\pi/T_n, T_n=0.1\sim 5.0)$ を用いて線形応答解析を行う。この時に得られた最大応答変位 x_1 を任意の値 λ で除した値を降伏変位と仮定して非線形応答解析を行うことにより、求めた最大応答変位 x_2 から塑性率を求める。この塑性率が 20 以下となるように任意の値 λ を変えて繰り返し計算を行い、固有周期毎に降伏変位を決定した。

図 3~5 より本研究が想定した等価線形化法は、他の方法よりも精度が良いと考えられる。本研究で求めた剛性比 η は押部の式によるものと類似していることから、塑性後に消費されるエネルギーを精度良く等価線形化できたことが解析精度の向上につながったと考えられる。ただし、非線形応答解析の結果と比較すると誤差が大きくなる固有周期の範囲があることから今後、改善する必要がある。

(参考文献)

- 1) 若林實：防災シリーズ 1 耐震構造、森北出版株式会社、1990 年。
- 2) 柴田明德：最新建築シリーズ 9 最新耐震構造解析、森北出版株式会社、pp.41-144、1990 年。
- 3) 押部晋也：塑性後の振動モード変更を考慮した多自由度弾塑性系の最大応答変位の推定、鳥取大学修士論文、2009 年。

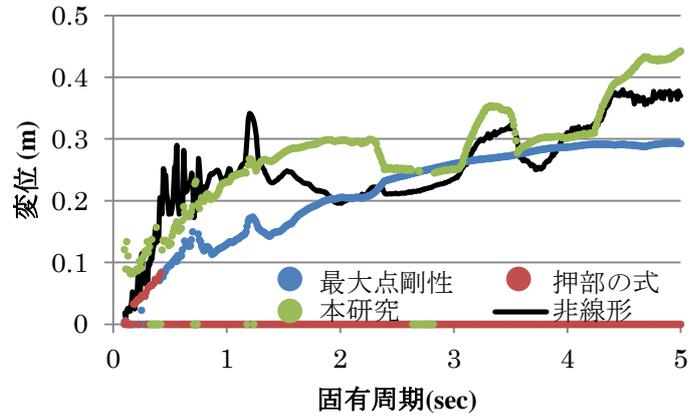


図 3 JMA 神戸波(NS 成分)

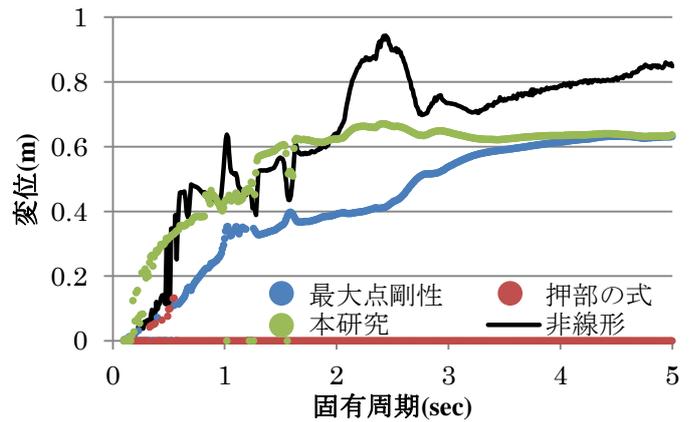


図 4 JR 鷹取波(NS 成分)

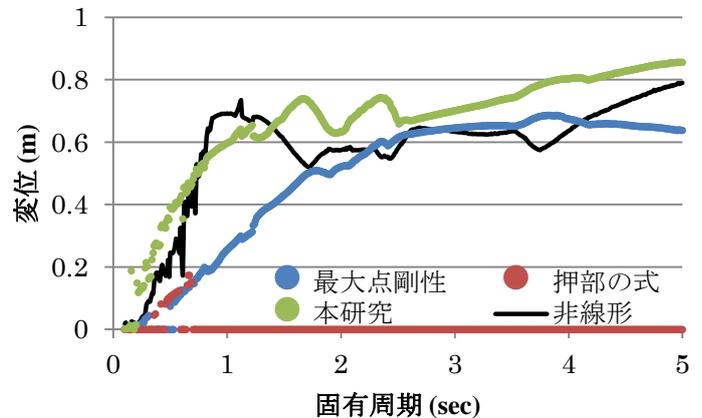


図 5 ポートアイランド波(NS 成分)