個別要素法を用いた砂堆・反砂堆の発生過程に関する数値計算

株式会社クレアリア　正会員　○三宅由衣
鳥取大学大学院工学研究科　正会員　檜谷　治
鳥取大学大学院工学研究科　正会員　梶川勇樹

１．はじめに

河床波の発生・発達過程に関する数値計算については従来から研究が行われており，流砂量算定時に摩擦速度に変動を与える手法や，非平衡流砂モデルを用いた手法などが挙げられる．近年では，個別要素法（DEM）と流れのモデルを組み合わせた手法により砂堆の発生過程に関する数値計算が試みられている．本研究では，DEM に河床砂礫内の流れも解析可能なポーラスモデルに基づく流況モデルを組み合わせ，砂堆および反砂堆の発生過程に関する数値計算を試みた．

２．数値計算モデル

1）鉛直２次元流れの基礎方程式および数値計算法

本研究では，河床砂礫内の流況も同時に解けるポーラスモデルの考え方を参考にするが，この考え方は，Hirt により提唱された FAVOR 法 [1)]における体積率および面積率とほぼ同様の考え方であり，基礎方程式に FAVOR 法を導入することで河床砂礫内の流況も解析可能と考えた．また，多孔質部分については，多孔質体からの抵抗による影響項を基礎式内に導入した．乱流モデルについては，流砂の挙動を精度よく再現するため，ストレイン・ローテイションパラメータ依存性を導入した非線形k-εモデルを採用した．［1］に本研究で使用した基礎方程式を示す．

ここに，t : 時間，添え字 i,j : 総和規約に従い，(1,2) はそれぞれ(x,z)方向を表す，$A_{(j)}$: j 方向の面積率，V : 体積率，u_j : j 方向の流速成分（多孔質部分は見かけの流速），$(F_x, F_z) = (g\sin\theta, -g\cos\theta)$，$g$: 重力加速度，θ : 水路床勾配，ρ : 流体の密度，$P = p + 2/3\rho k$，p : 圧力，R_{xi} : i 方向の多孔質体からの抵抗力，u_j' : j 方向の乱れ速度，ν_e : $\nu_t+\nu$，ν_t : 渦動粘性係数，ν : 動粘性係数，k : 乱れエネルギー，ε : 乱れエネルギー散逸率，C_{Df} : 抵抗係数（C_{Df}=2.0）である．

［1］流れの基礎方程式

・運動方程式
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{V}\left\{\frac{\partial A_{(j)} u_j u_i}{\partial x_j}\right\} = F_{xi} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{V}\frac{\partial A_{(j)}\cdot -\overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{A_{(j)}\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\} - \frac{1}{V}R_{xi}$$

・連続式
$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{A_{(j)} u_j\right\} = 0$$

・k-方程式
$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{1}{V}\left\{\frac{\partial A_{(j)} u_j k}{\partial x_j}\right\} = -\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{A_{(j)}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right\} - \frac{1}{V}2R_{xz}k$$

・ε-方程式
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{V}\left\{\frac{\partial A_{(j)} u_j \varepsilon}{\partial x_j}\right\} = -C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{A_{(j)}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right\} - \frac{1}{V}2R_{xz}\varepsilon$$

σ_k=1.00，σ_ε=1.30，C_1=1.44，C_2=1.92

・多孔質体からの抵抗力
$$R_{xi} = \frac{1}{2}\frac{C_{Df}}{\Delta x_i}\left(1 - A_{(i)}\right)u_i\sqrt{u^2 + w^2}, \quad R_{xz} = \sqrt{R_x^2 + R_z^2}$$

［2］DEM に基づく粒子の基礎方程式
$$\rho\left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M\right)A_3 d^3\frac{du_{pi}}{dt} = F_{pINTi} + F_{Di} + \rho\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right)A_3 d^3 F_{xi}$$
$$\sigma\frac{\pi d^5}{60}\frac{d\omega_p}{dt} = -T + T_{pINT}$$
$$\begin{bmatrix} F_{Dx} \\ F_{Dz} \end{bmatrix} = \Theta_{FD}\cdot\begin{bmatrix} u_s - u_p \\ w_s - w_p \end{bmatrix}$$
$$\Theta_{FD} = \frac{1}{2}\rho C_{Dp}A_2 d^2\sqrt{\left(u_s - u_p\right)^2 + \left(w_s - w_p\right)^2}$$

・モデル定数の設定
$$\Delta t_p = T/\alpha_{tn}, \quad T = 2\pi\sqrt{m/2k_n}$$
$$\Delta t_p \le 2\sqrt{m/k_n}$$
$$k_n = 2m\left(\frac{\pi}{\beta\alpha_{tn}\Delta t_p}\right)^2, \quad k_s = \frac{k_n}{2(1+\nu)}$$

［3］流砂量の算出式
$$q_B^* = \frac{A_3 d^3\int v_g(z)\cdot u_p(z)dz}{\sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd^3}}, \quad v_g = \frac{1}{d\cdot\Delta x\cdot A_2 d^2}\sum A_{si}$$

2) DEMに基づく粒子の運動方程式および数値計算法

DEM は個々の粒子間接触点において，法線および接線方向に弾性スプリング（バネ定数 k_n, k_s）および粘性ダッシュポット（粘性定数 c_n, c_s）を配置して相互作用力を表現している．[2]に鉛直 2 次元場における水流中の砂粒子の運動方程式とモデル定数について示す．ここに，σ：砂粒子の密度，C_M：付加質量係数（C_M =0.5），A_2,A_3：砂粒子の 2 次元・3 次元形状係数（球を想定し，A_2=π/4, A_3=π/6)，d：砂粒径，ω_p：砂粒子の角速度，ε：遮蔽係数，C_{Dp}：抗力係数（C_{Dp} =0.4)，(u_p, w_p)：x 方向および z 方向の砂粒子速度成分，(u_s, w_s)：格子中央流速成分から内挿により得られる粒子に作用する流速成分である．

また，モデル定数については，質点 m の上下にバネ（バネ係数 k_n）を配した 1 自由度振動系の固有周期 T を基準に, DEM 計算時間間隔 Δt_p とバネ定数 k_n を関連付けて設定し 2), k_n はパラメータ β, α_{tn} により調整を行った．ここに，ν：ポアソン比（= 0.3）である．

３．本数値計算モデルによる既往流砂量式の再現

本数値モデルの妥当性を検討するため，まず，既往流砂量式との比較を行った．計算方法として，粒径 5, 2, 1mm の粒子を流下方向 20cm の領域に対し, 厚さ 2cm 程度になるよう落下法により粒子を敷き詰め，水位を 7cm と固定して単位幅流量を変化させ，その際の無次元流砂量 q_{B*}を[3]に示す式より算定した．ここに，$\sum A_{si}$：検査面積(=$d/\Delta x$)における粒子部分総面積である．計算条件を表-1 に示す．境界条件として，側方境界では流れのモデルおよび個別要素法ともに周期境界とした．

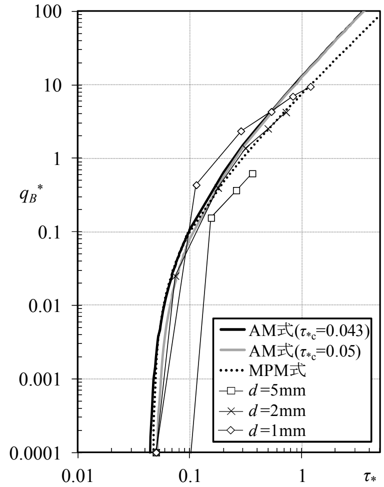
計算結果を図-1 に示す．まず，図-1(a)より，粒径が 2mm の場合は既往流砂量式にほぼ一致する結果を得ることができた. そこで, 5mm, 1mm に対して, 2mm と同様の DEM パラメータを用いて計算を行った. 粒径 5mm の場合について既往流砂量式と比較すると, 全体的に小さな値となり，無次元掃流力 τ_* が 0.1 以下では流砂量がほぼ 0 となった. 粒径 1mm では，τ_*が大きい場合は既往流砂量式とほぼ一致したが，τ_*が小さくなると流砂量が大きく表れた．

そこで，粒径 5mm, 1mm については，β を調整して計算を行った．それぞれ結果を(b)，(c)に示す．(b)の粒径 5mm の場合には，β が小さくなるにつれて流砂量は大きくなり，β = 0.2 のときに，より既往流砂量式に沿う結果となった．(c)の粒径 1mm の場合には，粒径 5mm の場合とは逆に，β が大きくなるにつれて流砂量は小さくなり，β を大きくすることによって，全体的に既往流砂量式に沿う結果を得ることができた．

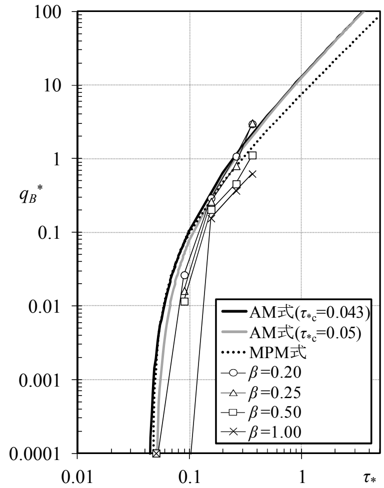
以上の様に，DEM パラメータを適切に設定することにより，本数値モデルで既往流砂量式を表現するできることが分かった．

表-1 計算条件（流砂量再現）

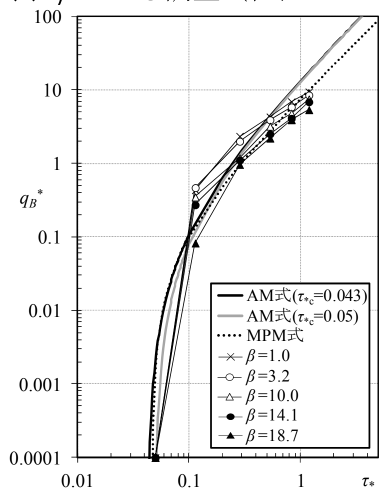
下流端水位 H_t(cm)	7.0
勾配 i	1/10000
粗度係数 n	0.014
河床変動時間ステップ Δt_z(sec)	1.0×10^{-4}
流れ時間ステップ Δt_f(sec)	1.0×10^{-4}
DEM 時間ステップ Δt_p(sec)	2.0×10^{-6}
流下方向メッシュ間隔 Δx(cm)	1.0
鉛直方向メッシュ間隔 Δz(cm)	0.4



(a) 粒径別の比較



(b) β による調整（粒径 d =5mm）



(c) β による調整（粒径 d =1mm）

図-1 既往流砂量式との比較

４．砂堆・反砂堆の発生過程に関する数値計算

本数値モデルを用いて，水理条件を変化させることにより形態の異なる河床波の再現計算を試みた．計算条件を**表-2** に示す．計算は，粒径 1mm の砂粒子を流下方向 50cm の領域に対し，厚さ 2cm 程度になるよう，落下法によって敷き詰めた状態から開始した．境界条件は流れのモデル・個別要素法共に周期境界条件とした．

計算ケースを**表-3** に示す．ここで，**３**．では粒径が 1mm の場合，β を 1.0 よりも大きくすることで，より既往流砂量式と合う結果が得られたが，β を大きくするとバネ定数が小さくなる．そのような場合，長田ら[3)]は粒子堆積層内で微小振動が継続するといった問題点を挙げており，ここでは β=1.0 として計算を行った．

表-2　計算条件（河床波）

水路幅 B (cm)	20.0
マニングの粗度係数 n	0.014
粒子数	13186
河床変動時間ステップ Δt_z (sec)	1.0×10^{-4}
流れ時間ステップ Δt_f (sec)	1.0×10^{-4}
DEM 時間ステップ Δt_p (sec)	4.0×10^{-6}
流下方向メッシュ間隔 Δx(cm)	1.0
鉛直方向メッシュ間隔 Δz(cm)	0.4

表-3　計算ケース（河床波）

	単位幅流量 q (cm^2/s)	水位 H (cm)	勾配 i
Run1	1600	7.0	1/5
Run2	1600	17.0	1/100

(1) 反砂堆の条件下である Run1（τ_*=2.4，F_r=2.0～3.0）の結果について考察する．Run1 の初期流況を**図-2**，河床変動計算開始から 8～10 秒後の様子を**図-3** にそれぞれ示す．**図-3** を見ると，番号①～⑥で示すように河床波が上流へ移動しており，反砂堆の特徴を再現できていることが分かる．波長，波高の平均値はそれぞれ 7.1cm，0.6cm であった．また，波番号①は 8 秒後に x 方向 18.5cm 地点，9 秒後には 13.0cm 地点にあるため，上流へ 5.5cm 移動しているが，波番号②は 8 秒後に x 方向 28.0cm 地点，9 秒後には 17.5cm 地点と上流へ 10.5cm 移動しており，発生した河床波の移動速度はそれぞれ異なっていた．水面形については，河床波の波長・波高が大きなところで，特に水位が上昇していた．しかし，一般的な反砂堆の場合，水面形の特徴として河床波と同位相となることであり，河床形状だけを見ると反砂堆のような特徴は再現できているが，水面形までは十分に再現することができなかった．

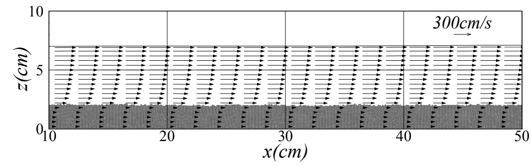


図-2　初期河床と流速ベクトル（Run1）

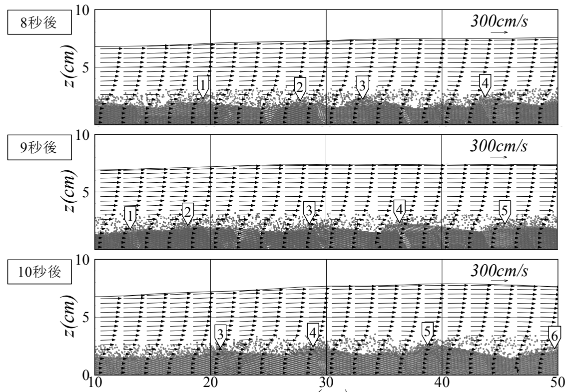


図-3　8～10 秒後の河床と流速ベクトル（Run1）

(2) 砂堆の発生条件下である Run2（τ_*=0.208，F_r=0.6～0.75）の結果について考察する．初期流況を**図-4** に，河床変動計算開始から 10～60 秒後の様子を**図-5** にそれぞれ示す．**図-5** より，河床変動計算開始直後から表層の粒子が動き始め，さらに時間が経過すると河床波が発生し，流下方向に移動していることが分かる．また，水面形は，河床波の波長・波高が大きなところで，特に水位が上昇している傾向が見られ，河床とほぼ同位相となった．ここで，Run2 の条件下で発生すると推定される砂堆の河床波長 L_D および波高 H_D は，主として水深 h に依存し，実験的に式(4-1),(4-2)で表される[4)]．Run2 の計算条件下（水深 h=15.0cm）では，河床波長 L_D = 75～105cm，波高 H_D = 2.0cm となり，今回設定した計算領域では，予想される河床波長を十分再

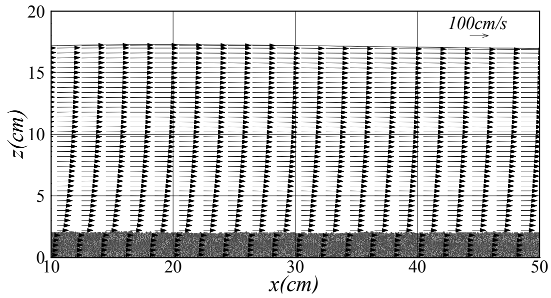


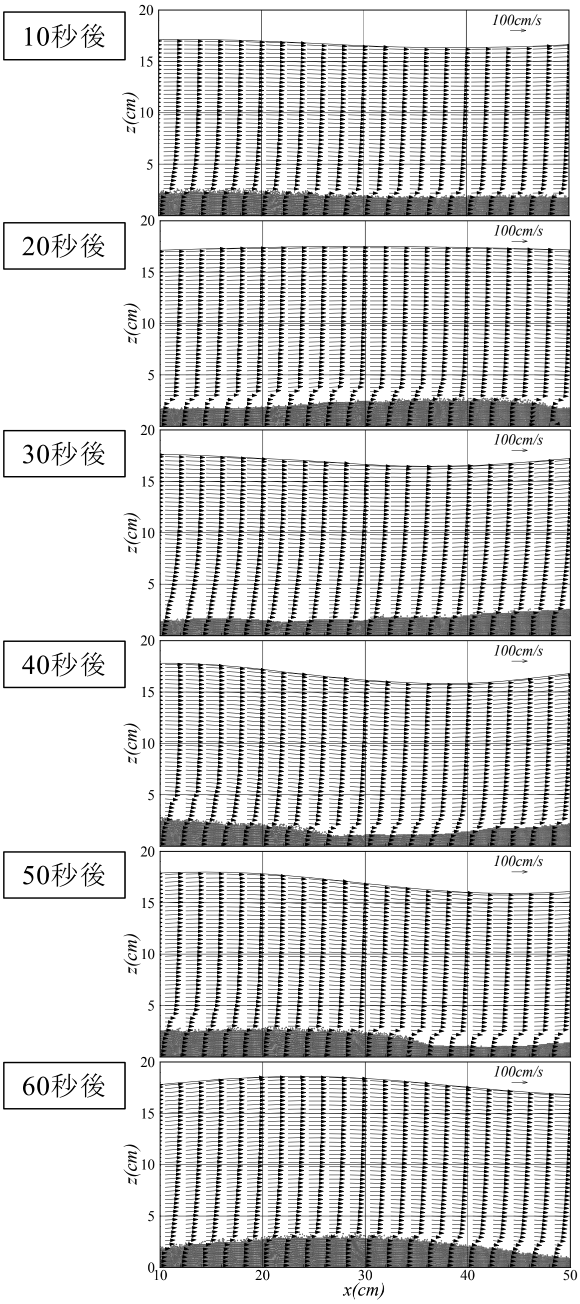
図-4　初期河床と流速ベクトル（Run2）

現できないと考えられる．そのため，Run2 の条件で発生する河床波は，周期境界条件についても適用範囲を超えるような現象であったことが考えられる．今回は計算時間やメモリの関係から，計算領域を小さくして計算を行ったが，今後は予想に合った領域を設定することが望ましい．

また，時間的変化に関しては中川らの研究 5)によると，小規模河床波に関する実験では，通水後 2 分程度であれば，顕著な砂面波数スペクトルピークが見られ，河床波は比較的規則正しくなり，通水後 30 秒程度ではスペクトルピークは顕著ではなく，砂面もランダムないわゆる擾乱でしかないという結果を得ている．そのため，今回行った数値実験の計算時間では，Run1, 2 ともに，時間的に河床波が安定した後ではなく河床波の初期発達過程であると言え，河床波の平衡状態に達するまでを計算するには，少なくとも 5〜10 分程度の計算を行う必要があると予想される．

５．まとめ

本研究では，ポーラスモデルに基づく基礎方程式を FAVOR 法で表現し，土砂輸送モデルに DEM を用いて，砂堆・反砂堆の発生過程に関する数値計算を行った．その結果，定性的ではあるが，砂堆および反砂堆を再現することができた．しかしながら，今後の課題として，DEM 運動方程式において今回のモデルでは無視している Basset 項，Magnus 項，Saffman 力 2)の考慮，およびその効果について検討する必要があると考えられる．また，河床波の発生過程を再現する際，それぞれの水理条件で発生すると予想される河床波の分類を予測し，それに見合った計算領域や計算時間を設定することが挙げられる．



図−5　10〜60 秒後の河床と流速ベクトル（Run2）

$$L_D = 5h \text{ あるいは } 7h \qquad (4\text{-}1)$$
$$H_D = (0.03\sim0.06)L_D \qquad (4\text{-}2)$$

【参考文献】1) C. W. Hirt: Volume-fraction techniques: Powerful tools for wind engineering, Jour. of Wind Eng., No.52, pp.333-344, 1992. 2) 後藤仁志：数値流砂水理学 - 粒子法による混相流と粒状体の計算力学 - ，森北出版株式会社．3) 長田健吾，清水義彦，若井明彦：個別要素法を用いた流砂解析における問題点に関する考察，応用力論文集，Vol.7，pp.1033-1041，2004．4) 岩佐義朗ほか：水理学 II，p.66，浅倉書店，1993．5) 中川博次，辻本哲郎：砂面の波数スペクトルの時間的変化からみた河床波の形成機構, 第 26 回水理講演会論文集, pp.1-8, 1982.