

鳥取大学大学院 学生会員 ○金氏裕也
鳥取大学大学院 正会員 谷口朋代
鳥取大学大学院 正会員 小野祐輔

1. はじめに

構造物と地盤の応答はお互いに影響を及ぼし合う。これを構造物-地盤の相互作用という。地盤をバネ-質点系でモデル化ができれば、相互作用を含む応答を解析することは簡単になる(図1参照)。そのためには、半無限地盤から構造物の応答に寄与する地盤の質量を定める必要がある。よって本研究では、円柱基礎の振動に寄与する地盤の有効質量を導出することを目的とする。

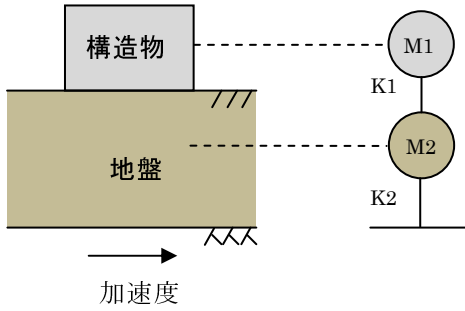


図1 構造物-地盤連成系のモデル化

2. 有効質量の概念

構造物の応答に寄与する地盤の加速度は、構造物に生じる加速度と一致するはずである。構造物に加速度 $\ddot{U}_0$ が生じると仮定する。構造物が運動することによって、地盤内に応力が発生する(図3参照)。

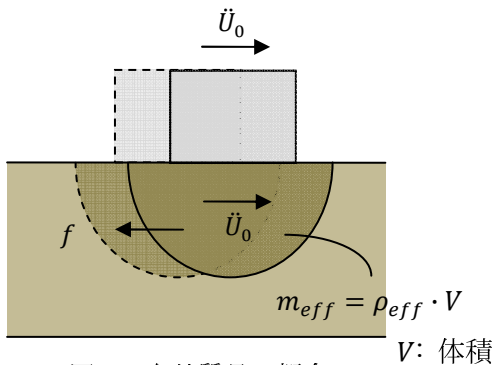


図2 有効質量の概念

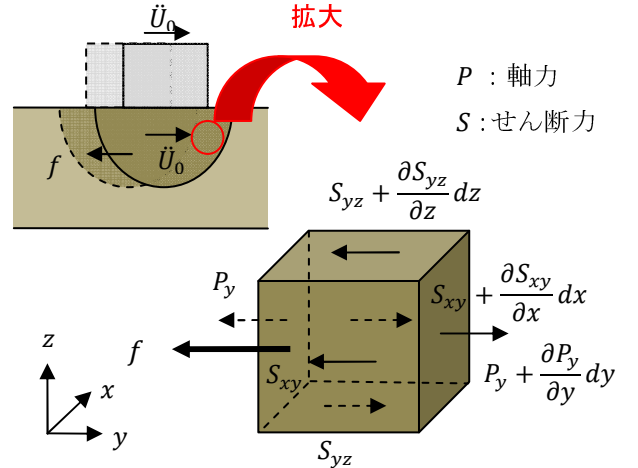


図3 微小体積に作用する力

よって、地盤内にはたらく力 f と加速度 $\ddot{U}_0$ が既知であるので、ニュートンの第二法則($m\ddot{U}_0 = f$)が成り立つようにみかけの地盤の質量を決定することができる。本論文ではこの地盤のみかけの質量を有効質量 m_{eff} と呼び次式で定義する。

$$m_{eff}\ddot{U}_0 = \rho_{eff}dxdydz \cdot \ddot{U}_0 = f \quad (1)$$

ここに、 ρ_{eff} は地盤の有効密度である。

3. 有効密度の導出

厚さ H の半無限地盤内にある半径 a 、高さ H の剛な円柱基礎を考える(図4参照)。円柱基礎の y 方向に一樣に加速度 $\ddot{U}_0$ が生じると仮定する。地盤内にはたらく慣性力と、軸力とせん断力の差とのつり合いより式(2)を得る(図5参照)。

$$\rho_{eff}\ddot{U}_0dxdydz = \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dxdydz \quad (2)$$

ここに、 τ はせん断応力、 σ は軸応力である。また、フックの法則を用いることで地盤内応力は以下のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) \\ \sigma_y &= E \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)を式(2)に代入して式(4)を得る。

$$\rho_{eff} = \frac{1}{\ddot{U}_0} \left[G \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) \right\} + E \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \right] \quad (4)$$

ここに、 U_x, U_y, U_z はそれぞれ x, y, z 方向の地盤の変位、 G はせん断弾性係数、 E はヤング率である。

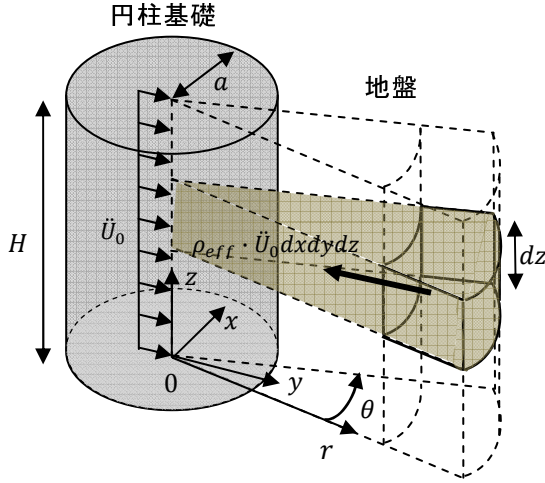


図4 円柱基礎 - 地盤のモデル

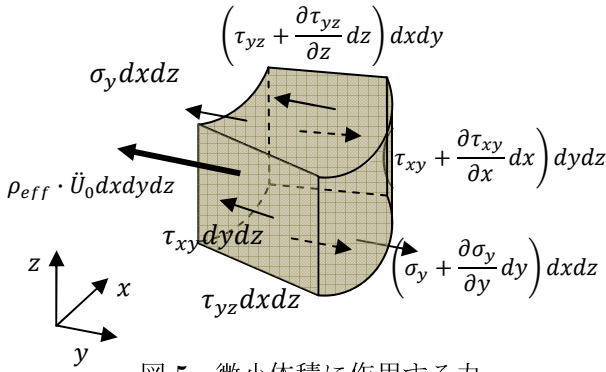


図5 微小体積に作用する力

本研究では簡単のため、 y 方向にのみ加速度 $\ddot{U}_0$ が生じているとすると、変位は y 方向にのみ生じる。 y 方向の変位を極座標系で表示すると式(5)の第一式となる。また、 x, z 方向の変位による有効密度への影響は極めて少なかったので、 U_x と U_z を 0 とした。

$$\begin{cases} U_y = U_r \sin \theta + U_\theta \cos \theta \\ U_x = U_z = 0 \end{cases} \quad (5)$$

ここに、 U_r, U_θ は、土岐、小松¹⁾の研究によって導出された円柱基礎の振動によって励起される地盤の変位

である。

$$\begin{cases} U_r = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{n,l} n \frac{H_n^{(1)}(k^* r)}{r} + B_{n,l} \frac{\partial H_n^{(1)}(h^* r)}{\partial r} \right] \\ U_\theta = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{n,l} \frac{\partial H_n^{(1)}(k^* r)}{\partial r} + B_{n,l} n \frac{H_n^{(1)}(h^* r)}{r} \right] \end{cases} \begin{cases} \cdot \sin \alpha_l z \cdot \sin n\theta \cdot e^{i\omega t} \\ \cdot \sin \alpha_l z \cdot \cos n\theta \cdot e^{i\omega t} \end{cases} \quad (6)$$

ここに、 $H_n^{(1)}(k^* r)$ は第一種ハンケル関数、 $\alpha_l = (2l-1)\pi/2H$ ($l=1,2,3,\dots$) である。また、 $A_{n,l}, B_{n,l}$ は未定数である。一方、円柱基礎がない状態の地盤の動径方向の変位成分 V_0^r と接線方向の変位成分 V_0^θ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{cases} V_0^r = A_0 V(z) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^{m-1} m \frac{J_m(kr)}{kr} \sin m\theta e^{ikC_a - i\gamma} \\ V_0^\theta = A_0 V(z) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^{m-1} \frac{\partial J_m(kr)}{\partial(kr)} \cos m\theta e^{ikC_a - i\gamma} \end{cases} \quad (7)$$

ただし、

$$\begin{cases} \varepsilon_m = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2 & (m \neq 0) \end{cases} \\ V(z) = \frac{2 \cos\{\xi(1-z/H)\}}{\sqrt{\cos^2 \xi + \beta^2 \sin^2 \xi}} \\ \xi = \frac{\omega H}{C_1} \sqrt{1 - \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 \cos^2 e} \\ \beta = \frac{\rho_1 C_1 \sqrt{1 - (C_1/C_2)^2 \cos^2 e}}{\rho_2 C_2 \sqrt{1 - \cos^2 e}} \\ \gamma = \tan^{-1} \left(\beta \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \right) \end{cases} \quad (8)$$

$C_a = C_2 / \cos e$ 、 $k = \omega / C_a$ 、 $J_m(z)$ はベッセル関数である。いま円柱基礎の動径および接線方向の変位をそれぞれ V_s^r, V_s^θ とすれば、その側面で満足すべき条件式は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \{V_0^r\}_{r=a} + \{U_r\}_{r=a} = V_s^r \\ \{V_0^\theta\}_{r=a} + \{U_\theta\}_{r=a} = V_s^\theta \end{cases} \quad (9)$$

ここでは、円柱基礎は剛な構造物と仮定しているので、 V_s^r, V_s^θ については、円柱基礎と基盤との結合点での基盤の動きに等しくなる。この条件式は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \{V_0^r\}_{r=z=0} = V_s^r \\ \{V_0^\theta\}_{r=z=0} = V_s^\theta \end{cases} \quad (10)$$

これらの境界条件を用いることによって、 $A_{n,l}, B_{n,l}$ が決定される。これらの諸式間の関係を用いれば、有効

密度は次式のごとくに定まる。

$$\rho_{eff} = \frac{G}{\ddot{U}_0} \left\{ \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial r^2} \cos^2 \theta + (1+2\nu) \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 U_y}{\partial r \partial \theta} \right. \\ \left. + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial U_y}{\partial r} - (1+2\nu) \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial U_y}{\partial \theta} \right. \\ \left. + 2(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial U_y}{\partial r} \right) \right\} \quad (11)$$

ここに、 ν はポアソン比である。式(11)に表 1 に示す諸元を代入し、有効密度を計算した結果を図 6、7 に示す。図中の ω/ω_g は駆動振動数 ω と地盤の固有振動数 ω_g との比である。

表 1 地盤定数

円柱基礎		
半径 a (m)	2	
高さ z (m)	10	
地盤	表層	基盤
地盤密度 ρ (ton/m ³)	1.8	1.8
S波速度 C (m/s)	150	320
ポアソン比 ν	0.3	0.3
深さ H (m)	10	∞

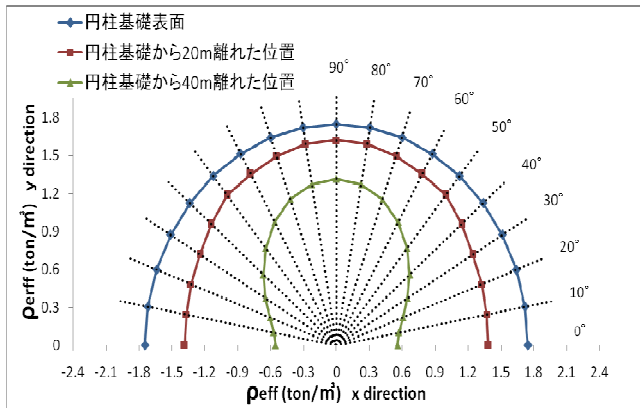


図 6 地表面での有効密度の分布

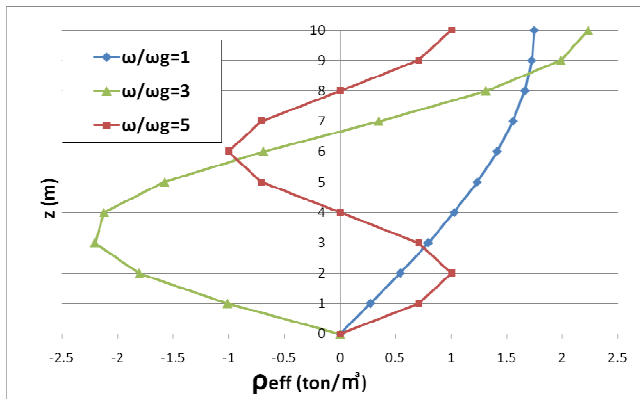


図 7 高さ方向の有効密度の分布

図 6 は地表面での有効密度分布を示している。有効密度は円柱基礎から離れるにつれて小さくなっている。これは無限遠では、構造物の応答に寄与する地盤はないことに対応している。図 7 は円柱基礎の側面位置での高さ方向の有効密度分布を示しているが、有効密度が実際の地盤の密度より大きい、または負の値を持つ場合がある。有効密度が実際の地盤の密度より大きい、または負の値を持つことは考えられない。また、円柱基礎は剛な構造物を考えているので、円柱基礎の側面位置での有効密度は実際の地盤の密度と一致するはずである。しかし、図 7 では有効密度分布が曲線になっている。

4. 有効質量の導出

有効質量は地盤の全範囲について体積積分することによって導出できる。

$$M_{eff} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{G}{\ddot{U}_0} \left\{ \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial r^2} \cos^2 \theta \right. \\ \left. + (1+2\nu) \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 U_y}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial U_y}{\partial r} \right. \\ \left. - (1+2\nu) \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial U_y}{\partial \theta} + 2(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial r^2} \sin^2 \theta \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial U_y}{\partial r} \right) \right\} dr d\theta dz \quad (12)$$

式(12)に表 1 に示す諸元を代入し、有効質量を計算した。結果を図 8 に示す。

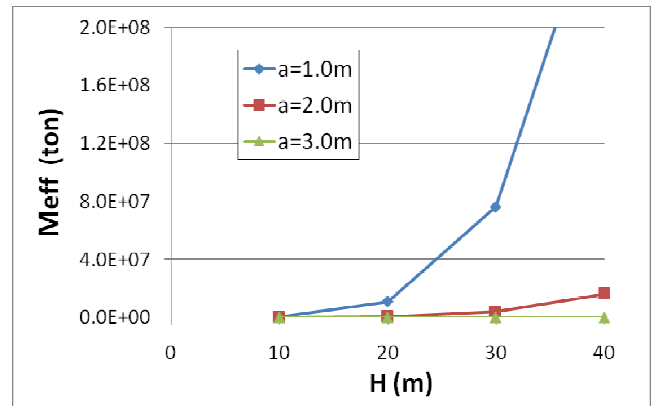


図 8 有効質量 ($\omega/\omega_g = 1$)

円柱基礎の高さが大きくなるにつれて有効質量は大きくなること分かる(図 8 参照)。一方、円柱基礎の半径が小さくなるにつれて有効質量は大きくなるとは考えにくい。これは円柱基礎の固有振動数を半径の大きさに関わらず同じ値を用いたことに原因がある。円柱

基礎の半径が変わることによって円柱基礎の固有振動数は変わる。したがって、円柱基礎の半径が変わる毎に、駆動振動数と地盤と円柱基礎の固有振動数を一致させる必要がある。

5. まとめ

ニュートンの第二法則から見かけの質量を定義する手法を適用して、駆動振動数と地盤と円柱基礎の固有振動数が一致する場合では有意な地盤の有効密度分布が得られた。しかし、有効密度は実際の地盤の密度より大きい、または負の値を持つ場合があり正しいと言えない。これについては、境界条件や因果律を見直す必要がある。

参考文献

- 1) 土岐 憲三, 小松 昭雄: 井筒基礎の地震応答解析に関する研究, 土木学会論文報告集 281 1979.1